ポテンシャルと流線

Joh @物理のかぎプロジェクト

2006-10-11

この記事は，一つ前の 多価関数のポテンシャル の内容の続きになっています．

一価ポテンシャルの流線

単連結な領域で定義されたポテンシャル場 $\boldsymbol{A}$ は一価関数によって与えることができました．そして，このポテンシャル場には次のような大きな特徴がありました．

1. 線積分 $\int_L \boldsymbol{A}\cdot d\boldsymbol{r}$ は積分経路によらない．
2. 周回積分 $\oint_C \boldsymbol{A}\cdot d\boldsymbol{r}$ は，積分経路によらず常に 0 になる．

本当はこの二つは同じことを言っているんですが（1 の線積分で始点＝終点としたら，2 の周回積分になりますからね），非常に大事な性質なので別に書いてみました．この二番目の性質より，次のことが言えます．

theorem

単連結な領域で，一価ポテンシャル関数によって与えられる流れ場に，閉じた流線はありません．

proof

もし閉曲線となる流線があれば，その流線に沿って線積分を考えるとき，流れと同じ方向なら $\boldsymbol{A}\cdot d\boldsymbol{r}$ は常に正，流れと逆方向なら常に負となり，どっち向きに一周しても 0 にはなりません．よって，流線は閉曲線にはなりません．■

例えば，多価関数のポテンシャル の最後で取り上げた，直線電流がビオ＝サヴァールの法則によって作る磁場は，電流を中心とする同心円状の閉曲線になりますから，この流れを一価ポテンシャル関数で表わすのは無理で，多価ポテンシャル関数による表現になるわけです．

theorem

流線が閉じる流れをポテンシャルで表わせるとすれば，それは多価関数になります．

*[1] ただし，多重連結領域の多価ポテンシャル関数も，工夫して（例えば穴を塞ぐなどして）領域を単連結に直すことで一価関数にすることが出来ます．そうすると，同時に閉曲線状の流線は有限領域には描けなくなります．こういった操作については，難しいのでここでは取り上げません．詳しくは，また機会があれば電磁気学の分野などで，具体的な問題とともに考えてみたいと思います．