定数係数 1 階線形微分方程式

おこめ・崎間@物理のかぎプロジェクト

2005-01-01

微分方程式というのは，その名の通り方程式に微分が入っている，つまり導関数が入っている方程式のことです．いろいろな形（ 変数分離形 など）があるのですが，ここではつぎのようなものを学びます．a を定数，$Q(x)$ をある連続な関数とするとき，x の関数である未知関数 y と，その導関数 dy/dx に関して 1 次式である，

$$\frac{dy}{dx}+ay=Q(x) \tag{1}$$

のうな形で表される微分方程式です．これを，定数係数 1 階線形微分方程式といいます．この形の微分方程式について，これからお話します（え，なぜかって？そりゃあ，よく使うからですよ♪）．

定数係数 1 階線形微分方程式の解の公式

いきなりですが，いま考えている微分方程式の解の公式を示します．式 (1)

$$\frac{dy}{dx}+ay=Q(x)$$

の一般解は

$$y=e^{-ax}\left\{\int e^{ax}Q(x)\,dx+C\right\} \tag{2}$$

で与えられます．ここで C は任意定数です．

未知関数 y についての微分方程式を「解く」とは，おおざっぱに言うと $y=$ の形に持って行く，ということです．ですから，式 (1) が式 (2) に変形できることが分かっていれば，これはもう，いつでも解けるわけです．といっても，こんな公式を丸暗記していたら大変です．手順を理解し，いつでも導出できるようにすることが重要です．

導出

ではここで，式 (2) を導出してみます．まず，積分を簡単にするために式 (1) の左辺

$$\frac{dy}{dx}+ay$$

を

$$\frac{d}{dx}F(x)$$

のような，「ある一つの関数 $F(x)$ の微分」の形に変形することを考えます．そのために，式 (1) の両辺に e^{ax} をかけますと

$$e^{ax}\frac{dy}{dx} + ae^{ax}y = e^{ax}Q(x)$$

となります．ここで，e^{ax} の微分が ae^{ax} となる性質を思い出します．すなわち上式は

$$e^{ax}\frac{dy}{dx} + \left(\frac{d}{dx}e^{ax}\right)y = e^{ax}Q(x) \tag{3}$$

と変形できることになります．ここまで，よろしいでしょうか．

さらにもう一つ，積の微分公式

$$\frac{d}{dx}f(x)g(x) = \frac{df(x)}{dx}g(x) + f(x)\frac{dg(x)}{dx}$$

を式 (3) の左辺に適用します．すると

$$e^{ax}\frac{dy}{dx} + \left(\frac{d}{dx}e^{ax}\right)y = \frac{d}{dx}\left(e^{ax}y\right)$$

がいえます．これは最初目指していた形です．ですから結局，式 (3) は

$$\frac{d}{dx}\left(e^{ax}y\right) = e^{ax}Q(x)$$

という形になるのです．ここまでくれば簡単，あとは両辺を x で積分して

$$e^{ax}y = \int e^{ax}Q(x)\,dx + C \tag{4}$$

が得られます．ここで C は任意定数です．左辺を「ある一つの関数 $F(x)$ の微分」という形に変形したかった理由は，このように両辺を一気に積分したかったからです．この方法は一般的に良く使うテクニックですので，憶えていておいて損はないでしょう．

最後に，式 (4) の両辺に e^{-ax} をかけますと，

$$y = e^{-ax}\left\{\int e^{ax}Q(x)\,dx + C\right\}$$

という，最初に示した式 (2) が得られるのです．

解の解釈

補足です．$\frac{dy}{dx} + ay = Q(x)$ において $Q(x) = 0$ の場合，すなわち

$$\frac{dy}{dx} + ay = 0$$

の場合があります．これは同次方程式と呼ばれ，変数分離形 になります．他方，$Q(x) \neq 0$ の場合は非同次方程式と呼ばれます．同次方程式の一般解 Ce^{-ax} （ $Q(x)$ の形と独立な解）と，非同次方程式の特殊解 $e^{-ax}\int e^{ax}Q(x)\,dx$ （ $Q(x)$ の形に依存する解）の線形結合が，式 (2) の一般解になっています．

例題

それでは，簡単な例題を示しておきます．

例題 1

つぎの定数係数 1 階線形微分方程式（長い名前だ…）

$$\frac{dy}{dx} + 5y = 6e^{x}$$

の一般解を求めます．まず，さきほどの導出の手順にしたがって，両辺に e^{5x} をかけます．すると

$$\frac{d}{dx}\left(e^{5x}y\right) = 6e^{6x}$$

となります（ここで一気に積の微分公式による変形も行っています）．上式の両辺を x で積分して

$$e^{5x}y = \int 6e^{6x}\,dx + C$$

となり（ C は任意定数)，さらに両辺に e^{-5x} をかけると

$$\begin{aligned} y &= e^{-5x}\left\{\int 6e^{6x}\,dx + C\right\} \\ &= e^{-5x}\left\{e^{6x} + C\right\} \\ &= e^{x} + Ce^{-5x} \end{aligned}$$

という一般解を得ます．

例題 2

速さ v に比例する抵抗が働くとき，質点の鉛直方向の運動方程式は

$$m\frac{dv}{dt} = -\kappa v + mg$$

と表せます．ここで m を質点の質量，g を重力加速度としています．この運動方程式は 変数分離形 として解くこともできますが，定数係数 1 階線形微分方程式であるとも言えますので，これまでの方法で解いてみます．

式を少し変形して

$$\frac{dv}{dt} + \frac{\kappa v}{m} = g$$

両辺に $e^{\kappa t/m}$ をかけ，積の微分公式から整理すると

$$\frac{d}{dt}\left(e^{\kappa t/m}v\right) = ge^{\kappa t/m}$$

両辺を t で積分して

$$e^{\kappa t/m}v = \int e^{\kappa t/m}g\,dt + C$$

を得，両辺に $e^{-\kappa t/m}$ をかけると

$$\begin{aligned} v &= e^{-\kappa t/m}\left\{\int e^{\kappa t/m}g\,dt + C\right\} \\ &= Ce^{-\kappa t/m} + \frac{mg}{\kappa} \end{aligned}$$

という速度の一般解を得ます．ここで C は任意定数です．ちなみにこういった任意定数は，初期条件に依って決まります．この例題について詳しくは，抵抗力のある落下運動 をご覧ください．