

ホッジ作用素を使った公式補足

Joh @物理のかぎプロジェクト

2006-11-06

外積代数に関して重要な事柄は、ここまでの記事でほとんどですが、[ホッジ作用素](#)に関する公式だけ、少し補足しておきます。

ホッジ作用素を二回作用させる

以下の議論では、空間の向きを保つとします。(つまり、右手系⇔左手系を途中で入れ替えません。) さて、一般のウェッジ積の次数に関し、 p ベクトル λ と q ベクトルのウェッジ積 μ について次の関係がなりたちました。([ウェッジ積について補足](#) を参照して下さい.)

$$\lambda \wedge \mu = (-1)^{pq} \mu \wedge \lambda \quad (1)$$

これを基底 σ_k, σ_{n-k} に適用すると次のようになります。ただし、 σ_k は $\wedge^k R^n$ の基底、 σ_{n-k} は $\wedge^{n-k} R^n$ の基底とします。

$$\sigma_k \wedge \sigma_{n-k} = (-1)^{k(n-k)} \sigma_{n-k} \wedge \sigma_k \quad (2)$$

一方、ホッジ作用素の定義式より、次式が言えました。空間の計量が分からないので、右辺の内積はそのままにしておきます。

$$\begin{aligned} \sigma_k \wedge \sigma_{n-k} &= (*\sigma_k, \sigma_{n-k}) \sigma_n \\ &= (*\sigma_{n-k}, \sigma_k) \sigma_n \end{aligned} \quad (3)$$

式 (3) で k と $n-k$ を入れ替えると次式を得ます。

$$\sigma_{n-k} \wedge \sigma_k = (\sigma_k, \sigma_k) \sigma_n \quad (4)$$

そこで、式 (2)(3)(4) を見比べて、次式が得られます。これは言わば、ホッジ作用素の逆作用を表わす式だと言えます。

$$*\sigma_{n-k} = (-1)^{k(n-k)} (\sigma_k, \sigma_k) \sigma_k \quad (5)$$

式 (3)(5) より, ホッジ作用素を二回連続して作用させる場合の表式を得られます. (いま, 基底としては正規直交基底を考えていますので, $(\sigma_k, \sigma_k)(\sigma_{n-k}, \sigma_{n-k}) = (\sigma_n, \sigma_n)$ となることに注意して下さい.)

$$\begin{aligned} **\sigma_k &= *((\sigma_{n-k}, \sigma_{n-k})\sigma_{n-k}) \\ &= (\sigma_{n-k}, \sigma_{n-k}) * \sigma_{n-k} \\ &= (\sigma_{n-k}, \sigma_{n-k})(-1)^{k(n-k)}(\sigma_k, \sigma_k)\sigma_k \\ &= (-1)^{k(n-k)}(\sigma_n, \sigma_n)\sigma_k \end{aligned} \quad (6)$$

基底の内積 (σ_n, σ_n) は, **p-ベクトルの内積** で定義したように, R^n の基底のうち, 計量がマイナスとなる基底の個数に応じて ± 1 のどちらかの値を取ります. これで, ホッジ作用素を二連続で作用させた場合の公式が得られました. ボリュームフォームの内積は, R^n の基底で計量を負をするもの (例えばミンコフスキー空間の時間軸) の個数を s として, $(-1)^s$ と書けますので, 式 (6) は次のようにまとめられます. (符号定数 t を使って $(-1)^s = (-1)^{\frac{n-t}{2}}$ としても同じです.)

theorem

$$**\sigma_k = (-1)^{k(n-k)+s}\sigma_k$$

具体例

三次元ユークリッド空間 E^3 で考えましょう. 正規直交基底を $\{e_1, e_2, e_3\}$ と取り, ボリュームフォームを $(e_1 \wedge e_2 \wedge e_3, e_1 \wedge e_2 \wedge e_3) = 1$ と決めます. このとき, 例えば, $\wedge^1 R^3$ の基底 e_1 と $\wedge^2 R^3$ の基底 $e_2 \wedge e_3$ は, ホッジ作用素によって次のように移されるのでした. (**ホッジ作用素** の記事の具体例で考えました.)

$$*e_1 = e_2 \wedge e_3$$

$$*(e_2 \wedge e_3) = e_1$$

公式 (6) は, 確かにこの結果を説明しています.

$$\begin{aligned} ** (e_1) &= (-1)^{1(3-1)}(e_1 \wedge e_2 \wedge e_3, e_1 \wedge e_2 \wedge e_3)e_1 \\ &= e_1 \end{aligned}$$

ちゃんと元に戻ってきました (^ ^).

一つの定理

ホッジ作用素に関して, もう一つ定理を補足しておきます. $\wedge^k R^n$ に属する二つの元 α, β に対し, 次式が成り立ちます.

theorem

$$\alpha \wedge *\beta = \beta \wedge *\alpha = (-1)^s(\alpha, \beta)\sigma_n$$

proof

α を $A\sigma_k = e_{h_1} \wedge \cdots \wedge e_{h_k}$ と書くとき、定理の両辺を 0 にしないのは、 $*\beta$ の基底が e_{h_i} を含まないときだけです。（[ホッジ作用素](#) の記事を参照して下さい。）このことは、裏を返せば β の基底が σ_k だということです。そこで、 $\beta = B\sigma_k$ と書きます。 σ_k と、構成する基底を重複しない $\wedge^{n-k} R^n$ の基底を σ_{n-k} と書きます。このとき、 $\alpha \wedge *\beta = AB\sigma_k \wedge (\sigma_{n-k}, \sigma_{n-k})\sigma_{n-k} = AB(\sigma_{n-k}, \sigma_{n-k})\sigma_n$ と変形できますが、さらに式 (5) を用いて $AB(\sigma_{n-k}, \sigma_{n-k})\sigma_n = AB(\sigma_k, \sigma_k)(-1)^s \sigma_n = (\alpha, \beta)(-1)^{-1} \sigma_n$ と変形されます。これで定理が示されました。■