1/x 周辺の積分（log x の近傍で）

クロメル@物理のかぎプロジェクト

2013-08-16

さて，$\int_1^x dx/x$ はなんでしょう？そうです，$\log x$ ですね．今回は，a を-1 に近づけたときの $\int_1^x x^\alpha dx$ の挙動を調べてみます．

動機

べき関数の積分に於いて，

$$\int_1^x x^\alpha dx \begin{cases} \dfrac{x^{\alpha+1}-1}{\alpha+1} & (\alpha \neq -1) \\ \log x & (\alpha = -1) \end{cases}$$

ですが，$\alpha = -1$ の時だけ別種の関数に見えています．では，α を -1 とは異なる，しかし，ごく近い実数にしたら，log に収束するのか，調べました．

$$\begin{aligned} \lim_{\alpha \to -1} \int_1^x x^\alpha dx &= \lim_{\alpha \to -1} \frac{x^{\alpha+1}-1}{\alpha+1} \\ &= \lim_{\beta \to 0} \frac{x^\beta - 1}{\beta} \\ &= \lim_{\beta \to 0} \frac{x^\beta - x^0}{\beta - 0} \\ &= \lim_{\beta \to 0} \frac{d}{d\beta} x^\beta \\ &= \lim_{\beta \to 0} \frac{d}{d\beta} e^{\beta \log x} \\ &= \lim_{\beta \to 0} \log x e^{\beta \log x} \\ &= \lim_{\beta \to 0} x^\beta \log x \\ &= \log x \quad (= \log_e x) \end{aligned}$$

この様に確かに，$\log x$ に収束しました．実は幾何学的な解釈をすれば，積分は曲線の下の面積なので，曲線が連続的に移り変わるなら，おかしなことは起こるはずがなかったのです．

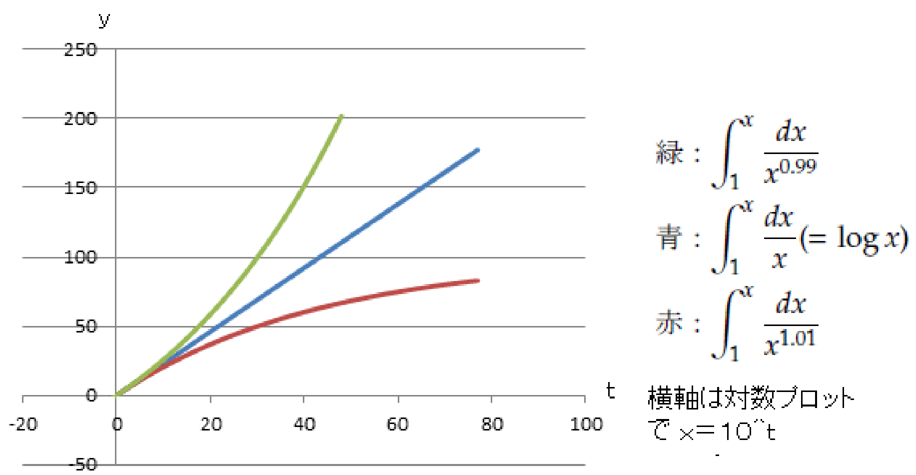
発散と収束の境界:log x

もう少し考えてみましょう．

$$\int_1^{\infty} x^{\alpha} dx$$

は，$\alpha < -1$ で収束，$\alpha \geq -1$ で発散したのでした．

横軸が対数の片対数のプロットでその様子を見てみましょう．それが，下の図です．



見ると，$\alpha = -1$ の直線を境に上に凸な $\alpha < -1$ と下に凸な $\alpha > -1$ できれいに分かれることが分かります．ちなみに赤線は

$$\frac{x^{\alpha+1}-1}{\alpha+1}\Big|_{\alpha=-1.01\ x\to\infty} = \frac{0-1}{-0.01} = 100$$

に収束します．それでは今日はこの辺で，お疲れ様でした．