

渦度ベクトルと循環

Joh @物理のかぎプロジェクト

2006-10-11

ベクトル場 u が流れ場を意味するとき、次式で定義されるベクトルを **渦度ベクトル** と呼びます。

$$\boldsymbol{\omega} = \nabla \times \boldsymbol{u} \quad (1)$$

渦度ベクトルの各座標成分は、座標軸に直交する平面内の渦度を表わしています。(例えば、 $\boldsymbol{\omega}$ の x 成分は yz 平面内の渦度を表わします。[rot](#) を参照して下さい。) また、 $\boldsymbol{\omega}$ の流線を **渦線** と呼び、 $\boldsymbol{\omega}$ の流管を **渦管** と呼びます。渦線の方程式は次のように与えられます。

$$\frac{dx}{\omega_1} = \frac{dy}{\omega_2} = \frac{dz}{\omega_3} \quad (2)$$

渦糸は、渦管の無限に細いものだと考えることも出来ます。粘性抵抗の働かない流体（完全流体と呼びます）においては、渦は消えたり生まれたりしないことが知られており、渦は不生不滅 などと言われます。

循環

流れ場の中のある閉曲線 C に沿って、 C の接線速度を周回積分したものを **循環** と呼びます。循環は、ストークスの定理を用いると、渦度ベクトルの面積分に直すことも出来ます。

$$\begin{aligned} \Gamma &= \oint_C \boldsymbol{V} \cdot d\boldsymbol{l} \\ &= \int \int_S (\nabla \times \boldsymbol{V}) \cdot d\boldsymbol{S} \\ &= \int \int_S \boldsymbol{\omega} \cdot d\boldsymbol{S} \end{aligned} \quad (3)$$

三行目で、任意に渦管を取るとき、その断面で循環の大きさは常に同じだということが言えます。(流管の断面を単位時間当たりに過ぎる流量が一定であることと、基本的には同じ理屈です。[ベクトル場の流束と](#)

*1 この定理は、ラグランジェの定理、ケルピンの定理、ヘルムホルツの定理などとも呼ばれます。これらの定理は、多少表現が異なりますが、結局、渦の不生・不滅を主張するものです。ここではあまり詳しい説明はしませんので、興味のある人は流体力学の教科書を参考にしてみてください。

流管を参照して下さい。) 特に, 渦糸は断面積が無限に小さい渦管と見なせますので, その断面の曲率を無視して断面積を σ とし, $\omega = |\boldsymbol{\omega}|$ とすると次式が成り立ちます.

$$\Gamma = \omega\sigma \quad (4)$$

この $\omega\sigma$ を 渦糸の強さ と呼びます. 渦や渦糸の話題は尽きませんが, 詳しくは流体力学の解説を見て下さい. この記事は, ベクトルの回転, ストークスの定理, 流線, 流管といった概念の応用例として, 渦と循環をほんの少しだけ取り上げてみました. (いずれ, 流体力学の記事もきちんと書くかも知れません.)