

# 渦度ベクトルと循環

Joh @物理のかぎプロジェクト

2006-10-11

ベクトル場  $u$  が流れ場を意味するとき、次式で定義されるベクトルを **渦度ベクトル** と呼びます。

$$\boldsymbol{\omega} = \nabla \times \boldsymbol{u} \quad (1)$$

渦度ベクトルの各座標成分は、座標軸に直交する平面内の渦度を表わしています。(例えば、 $\boldsymbol{\omega}$  の  $x$  成分は  $yz$  平面内の渦度を表わします。[rot](#) を参照して下さい。) また、 $\boldsymbol{\omega}$  の流線を **渦線** と呼び、 $\boldsymbol{\omega}$  の流管を **渦管** と呼びます。渦線の方程式は次のように与えられます。

$$\frac{dx}{\omega_1} = \frac{dy}{\omega_2} = \frac{dz}{\omega_3} \quad (2)$$

渦糸は、渦管の無限に細いものだと考えることも出来ます。粘性抵抗の働かない流体（完全流体と呼びます）においては、渦は消えたり生まれたりしないことが知られており、渦は不生不滅 などと言われます。

## 循環

流れ場の中のある閉曲線  $C$  に沿って、 $C$  の接線速度を周回積分したものを **循環** と呼びます。循環は、ストークスの定理を用いると、渦度ベクトルの面積分に直すことも出来ます。

$$\begin{aligned} \Gamma &= \oint_C \mathbf{V} \cdot d\mathbf{l} \\ &= \int \int_S (\nabla \times \mathbf{V}) \cdot d\mathbf{S} \\ &= \int \int_S \boldsymbol{\omega} \cdot d\mathbf{S} \end{aligned} \quad (3)$$

三行目で、任意に渦管を取るとき、その断面で循環の大きさは常に同じだと言えます。(流管の断面を単位時間当たりに過ぎる流量が一定であることと、基本的には同じ理屈です。[ベクトル場の流束と](#)

\*1 この定理は、ラグランジェの定理、ケルピンの定理、ヘルムホルツの定理などとも呼ばれます。これらの定理は、多少表現が異なりますが、結局、渦の不生・不滅を主張するものです。ここではあまり詳しい説明はしませんので、興味のある人は流体力学の教科書を参考にしてみてください。

流管 を参照して下さい。) 特に，渦糸は断面積が無限に小さい渦管と見なせますので，その断面の曲率を無視して断面積を  $\sigma$  とし， $\omega = |\boldsymbol{\omega}|$  とすると次式が成り立ちます．

$$\Gamma = \omega\sigma \quad (4)$$

この  $\omega\sigma$  を 渦糸の強さ と呼びます．渦や渦糸の話題は尽きませんが，詳しくは流体力学の解説を見て下さい．この記事は，ベクトルの回転，ストークスの定理，流線，流管といった概念の応用例として，渦と循環をほんの少しだけ取り上げてみました．(いずれ，流体力学の記事もきちんと書くかも知れません.)