

積分変換

Joh @物理のかぎプロジェクト

2005-08-01

積分変換という手法の，超入門です．

積分変換

ある関数 $f(t)$ を， $g(\alpha)$ に変換することを考えます．変換の仕方なんて，いくらでもあるわけですが，特に次のように積分を利用するものを積分変換と呼びます．

$$g(\alpha) = \int_a^b f(t)K(\alpha, t)dt \quad (1)$$

積分する前に，なんだか知らない関数 $K(\alpha, t)$ を掛けるというのがポイントです．この K を核と呼びます．積分区間は，核によって適当に定められるのが普通です．

いくつかの例

例えば $K(\alpha, t) = e^{i\alpha t}$ だと，フーリエ変換というものになります．

$$g(\alpha) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{i\alpha t}dt \quad (2)$$

もし $K(\alpha, t) = e^{-\alpha t}$ だと，これも有名なラプラス変換というものになります．

$$g(\alpha) = \int_0^{\infty} f(t)e^{-\alpha t}dt \quad (3)$$

電気信号などの理論に出てくる Mellin 変換というのは， $K(\alpha, t) = t^{\alpha-1}$ の場合です．

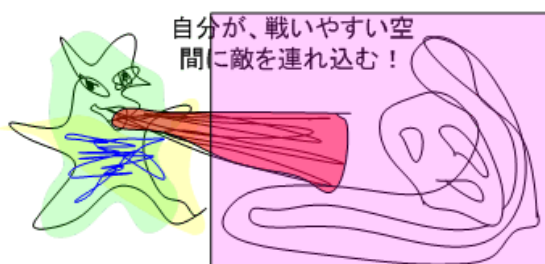
$$g(\alpha) = \int_0^{\infty} f(t)t^{\alpha-1}dt \quad (4)$$

積分変換の気持ち

核の種類によって、ものすごい種類の積分変換があって、専門家でない人は、自分に関係ないものを覚える必要はありません。

しかし、一般に積分変換を行うと、何が便利なのか、ということを理解しておくのは大事です。例えば、ラプラス変換は、大抵の理工系の大学で、いつかは習うものですが、ラプラス変換を行うと、微積分が、掛け算や割り算に変わってしまうのでした。微分方程式をラプラス変換しておいて、掛け算や割り算でそれを解き、ラプラス逆変換をしてやれば、魔法のように答えが出てしまうわけです。

ラプラス変換によって、微積分の世界から、一瞬、掛け算割り算の世界に移動し、計算を済ませてから、また元の世界に戻ってきたという感じです。



私が小さい頃、もう題名は忘れてしまいましたが、「宇宙刑事なんとか」とかというようなテレビ番組があり、そこでは悪者と戦うとき、何故か超空間にワープして戦っていました。その空間では、宇宙刑事のパワーが何倍にもなる、というナレーションが毎回入るのが印象的でした。^{*1} 積分変換というのは、宇宙刑事がしていたこととまさに同じです。自分が戦いやすい世界に敵をひきずり込んでおき、やっつけておいてから、また元の世界に戻るための、数学的ワープが積分変換です。

どんな世界に引きずり込みたいかは、使う人次第ですが、積分変換とは、一般に、そんなもんだと思っておいて下さい。

^{*1} その空間では、宇宙刑事のパワーではなくて、悪者の方のパワーが何倍にもなるのではないかと、という御指摘を頂いております。そのテレビ番組の筋はよく覚えていませんが、悪者のパワーが増すような空間で戦うのは得策ではありません。みなさんは、自分が計算しやすい空間に敵を引きずり込むようにして下さい。