exp(ix^2) のガウス積分

クロメル@物理のかぎプロジェクト

2013-07-07

ファインマンの経路積分で何気なく使っていたので，確かめてみました．短いです．

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} e^{ix^2} dx \tag{1}$$

と置きます．

すると，収束因子として，$\delta \to +0$ を用いて，

$$\begin{aligned} I^2 &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i(x^2+y^2)} dx dy \\ &= \int_0^{\infty} dr \int_0^{2\pi} d\theta r e^{ir^2} \\ &= [\frac{e^{ir^2}}{2i}]_0^{\infty} [\theta]_0^{2\pi} \\ &= \lim_{\delta \to +0} [\frac{e^{ir^2-\delta r}}{2i}]_0^{\infty} [\theta]_0^{2\pi} \\ &= \frac{-1}{2i} 2\pi \\ &= i\pi \end{aligned} \tag{2}$$

となり，よって，

$$\begin{aligned} I &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{ix^2} dx \\ &= \sqrt{i\pi} \end{aligned} \tag{3}$$

ですね．なるほど，

$$\begin{aligned} J &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\alpha x^2} dx \\ &= \sqrt{\pi/\alpha} \end{aligned} \tag{4}$$

ですから，この α に $-i$ を代入したものに一致するのですね．それでは，今日はこの辺で．お疲れ様でした．