ガウス積分の公式

CO @物理のかぎプロジェクト

2004-01-01

物理を学んでいると，頻繁に出てくる積分というのがあります．その一つが **ガウス積分** です．

ガウス積分

ガウス積分とは，つぎのような式で書かれる積分のことです．

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ax^2} dx \tag{1}$$

ここで x は実数，a は正の定数です．

ガウス積分の公式

ふつうガウス積分は，公式として扱われることが多いです．ガウス積分の公式はつぎのようなものです．

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-ax^2} dx = \sqrt{\frac{\pi}{a}} \tag{2}$$

ガウス積分の公式の証明

いくら公式だとはいっても，一度は本当にそうなることを確認しておきたいものです．この公式の証明は院試で頻出ですので，その道を目指す方は覚えておくと良いでしょう．

まず，左辺の積分値を I とします．I は被積分関数の関数形から，定義域が $I > 0$ であることがわかります．I は,

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ax^2} dx$$

と書いても,

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ay^2} dy$$

と書いても，積分値に変わりはありませんね.

したがって,

$$\begin{aligned} I^2 &= \left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{-ax^2} dx \right)^2 \\ &= \left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{-ax^2} dx \right) \cdot \left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{-ay^2} dy \right) \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} dx \int_{-\infty}^{\infty} dy \; e^{-a(x^2+y^2)} \end{aligned} \tag{3}$$

と変形していくことができます.

ここで $x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$ と変数変換をします. また, 無限遠で積分領域を矩形から円形へと変形します. 被積分関数が無限遠で速やかに 0 に収束することから, このようにしても積分値は変わりません. すると (3) 式は,

$$I^2 = \int_0^{\infty} rdr \int_0^{2\pi} d\theta \; e^{-ar^2} \tag{4}$$

と書けます. θ については積分を実行することができて, さらに式変形をしていくと

$$\begin{aligned} I^2 &= 2\pi \int_0^{\infty} rdr \; e^{-ar^2} \\ &= 2\pi \int_0^{\infty} d\left(\frac{r^2}{2}\right) \; e^{-ar^2} \\ &= \pi \left[-\frac{1}{a} e^{-at} \right]_{t=0}^{t=\infty} \\ &= \frac{\pi}{a} \end{aligned} \tag{5}$$

となります. ただし 2 行目から 3 行目で見やすいように, 積分変数 r^2 を t に置換しています. $I > 0$ なので, 正の値のみをとって

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ax^2} dx = \sqrt{\frac{\pi}{a}} \tag{6}$$

となり, ガウス積分の公式を得ることができました.