色々な線積分

Joh @物理のかぎプロジェクト

2006-10-11

ここまでに，スカラー関数の線積分と，ベクトル場の曲線に沿った線積分を考えました．

$$\int_L f ds \tag{1}$$

$$\int_L f d\boldsymbol{r} = \boldsymbol{e_1}\int_L f dx_1 + \boldsymbol{e_2}\int_L f dx_2 + \boldsymbol{e_3}\int_L f dx_3 \tag{2}$$

$$\int_L \boldsymbol{A}\cdot d\boldsymbol{r} = \int_L A_1 dx_1 + A_2 dx_2 + A_3 dx_3 \tag{3}$$

ベクトル場の線積分には，他の形もあります．式 (3) は，積分の中身が内積の形になってものでしたが，線積分というのは，曲線に沿った積分領域を考えるということであって，被積分関数には色々あって良いのです．三次元ベクトルで基本的な演算には，内積の他にスカラー積と外積がありましたから，以下のような線積分を考えることもできます．

$$\int_L \boldsymbol{A} ds = \boldsymbol{e_1}\int_L A_1 ds + \boldsymbol{e_2}\int_L A_2 ds + \boldsymbol{e_3}\int_L A_3 ds \tag{4}$$

$$\int_L \boldsymbol{A}\times d\boldsymbol{r} = \boldsymbol{e_1}\int_L (A_2 dx_3 - A_3 dx_2) + \boldsymbol{e_2}\int_L (A_3 dx_1 - A_1 dx_3) + \boldsymbol{e_3}\int_L (A_1 dx_2 - A_2 dx_1) \tag{5}$$

ポテンシャルという概念との相性の良さからか，物理の問題によく出て来るベクトル場の線積分の多くは式 (3) の内積形ですが，この際，線積分には他にも色々あることをまとめて覚えてしまいましょう．一度

に並べて眺めてみると，数学的には見通しが良くなると思います．

線積分の計算

既に スカラー関数の線積分 で触れましたが，積分区間（つまり曲線）をパラメーター表示すると，実際の計算は簡単になります．合成関数の微分公式を使いましょう．

$$\int_L f ds = \int_L f \frac{ds}{dt} dt$$

$$\int_L f d\boldsymbol{r} = \int_L f \frac{d\boldsymbol{r}}{dt} dt$$

$$\int_L \boldsymbol{A} \cdot d\boldsymbol{r} = \int_L \left(\boldsymbol{A} \cdot \frac{d\boldsymbol{r}}{dt} \right) dt$$

$$\int_L \boldsymbol{A} d\boldsymbol{s} = \int_L \boldsymbol{A} \frac{d\boldsymbol{s}}{dt} dt$$

$$\int_L \boldsymbol{A} \times d\boldsymbol{r} = \int_L \left(\boldsymbol{A} \times \frac{d\boldsymbol{r}}{dt} \right) dt$$

練習問題

ベクトル場 $\boldsymbol{A} = x\boldsymbol{e_x} + 2(x+z)\boldsymbol{e_y} + y\boldsymbol{e_z}$ を，始点を $(0,0,0)$，終点を $(1,2,2)$ とする線分に沿って線積分します．次の値を計算して下さい．

1. $\int_C \boldsymbol{A} ds$
2. $\int_C \boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{r}$
3. $\int_C \boldsymbol{A} \times \boldsymbol{r}$

こたえ：（1） $\frac{3}{2}\boldsymbol{e_x} + 9\boldsymbol{e_y} + 3\boldsymbol{e_z}$ （2） $\frac{17}{2}$ （3） $4\boldsymbol{e_x} - 2\boldsymbol{e_z}$

*1 上記の 5 つで，スカラーとベクトルの組み合わせとして『スカラー・スカラー』『スカラー・ベクトル』『ベクトル・ベクトル』『ベクトル・スカラー』『ベクトル × ベクトル』を網羅していることを確認してください．『ベクトル ⊗ ベクトル』なんていうのを知っている人もいるかも知れませんね．実際，そんな量の線積分を考えることも出来ます．いろいろあります．