クラインの四元群

Joh @物理のかぎプロジェクト

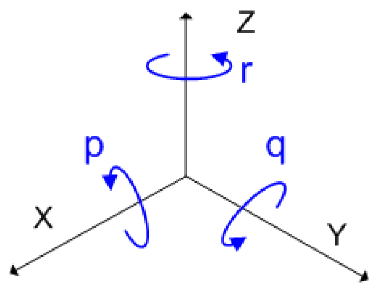
2006-04-23

教科書によく出てくるものに，クラインの四元群というものがあります．クラインの四元群とは，位数４の可換群です．位数４の可換群なので，4×4 の群表 (対角線に対して対称になるはず) を書けば，元同士の演算関係を網羅できるはずです．

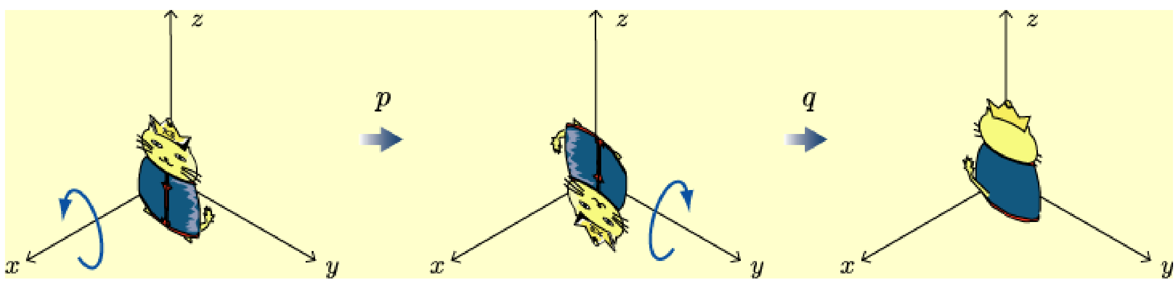
群の構造としては，群表を書いた時点で説明を尽くしているのですが，具体的にはクラインの四元群は x, y, z 各軸回りに 180 度回転させる回転操作の群として表現されます．

クラインの四元群

次図のように，x 軸，y 軸，z 軸に沿って図形を 180 度回すような回転を，それぞれ p, q, r と名づけます．(有限回転の操作は，一般に非可換です．無限小回転１ を参照してください．しかし，回転角が 180 度の場合は可換になります．つまり，これは有限回転の操作の中では，かなり例外的なものです．)



例えば，p の操作の後に続けて q の操作を行うことは，r の操作に等しくなります．



想像だけで考えていると混乱してくるので，どうか何か手に取って，実際に回して確認してみてください．同様に，q に続けて r を行う変換は，p に等しくなります．また，同じ変換を二回続けて行うと，何もしなかったの (恒等変換 e) と同じになります．

これらの回転操作 e, p, q, r は群をなします．群表にまとめると，次のようになります．

表 1: クラインの四元群の群表

	e	**p**	**q**	**r**
e	e	p	q	r
p	p	e	r	q
q	q	r	e	p
r	r	q	p	e

同じ構造の群

上の表中，$\{e, p, q, r\}$ として，回転操作の代わりに，次のような四つの行列の積を考えても，上と同じ群表を満たします．計算して確かめてみましょう．ただし j は二乗して $j^2 = 1$ となる，分離複素数 と呼ばれるちょっと変わった数です．複素数ではありません．

$$e = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad p = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -j \end{pmatrix}, \quad q = \begin{pmatrix} -j & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad r = \begin{pmatrix} -j & 0 \\ 0 & -j \end{pmatrix}$$

つまり，これらの行列の集合は，群として同じ構造をしているということです．他にもクラインの四元群と同じ構造の集合 (元が４つあり，同じ群表を満たすもの) を探してみましょう．

練習問題１

クラインの四元群は４次の対称群 S_4 の元のうち，次の四つを元とする部分群だと言うこともできます．群表を書いて確認してみましょう．（上の群表で e, p, q, r に当たるのは，それぞれどれでしょう？）

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 4 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

---

*1 クラインの四元群の元 p, q, r はどれも二乗すると e になりますから位数は 2 だと言えます．クラインの四元群は，巡回群ではない群としては最小のものです．クラインの四元群が存在することと，四次方程式に解の公式が存在することは，ガロア理論によって結び付けられます．

*2 クライン (Felix Klein (1849-1925)) は，群論の幾何学における重要性を大いに研究した数学者です．クラインがエルランゲン大学で行った講義をまとめた『エルランゲン目録』は特に有名で，「一つの幾何学は，一つの変換群によって不変な性質を研究する不変式論である」との主張を行いました．なんのこっちゃ，と思うかも知れませんが，これはショッキングな宣言です．噛み砕いて言えば，あるタイプの幾何学には，一つの変換群が一対一に対応するという主張なのです．具体的には，ユークリッド幾何学には運動群が，アフィン幾何学にはアフィン群が，射影幾何学には射影変換群が対応するという具合です．このようにして，色々な分野に分かれていた幾何学が，群論によって統一的に扱われる可能性が拓かれ，逆に，群論の研究から，新しいタイプの幾何学が生まれてくる可能性もが示されました．いまや幾何学の勉強に群論は欠かせません．

練習問題２

二つの文字からなる集合 $S = \{A, B\}$ と $T = \{1, 2\}$ を考えます．これらを組み合わせできる文字は全部で $\{A1, A2, B1, B2\}$ の４つです．これに二つの関数 σ, τ を考えます．σ は文字に作用すると A と B を入れ換えてしまう関数です．すなわち $\sigma(A1) = B1$, $\sigma(B2) = A2$ のようになります．一方，τ は数字を入れ換えてしまう関数で $\tau(A1) = A2$, $\tau(B2) = B1$ のように働きます．

1. σ と τ の結合は可換であることを確認してください．
2. $\sigma, \tau, \sigma \circ \tau$ と恒等置換 e の四つは群をなし，クラインの四元群と同型であることを確認してください．