三角関数の合成

崎間@物理のかぎプロジェクト

2004-11-1

二つの三角関数

$$a \sin\theta, \quad b\cos\theta$$

を，一つの三角関数

$$r\sin(\theta+\phi)$$

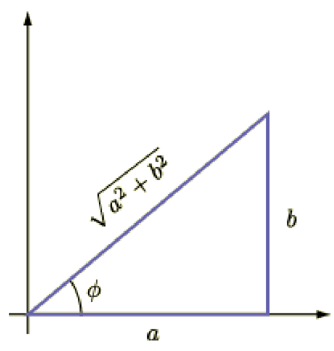
の形に変形することができます．ここで

$$r = \sqrt{a^2+b^2}, \quad \phi = \tan^{-1}\frac{b}{a}$$

です．この関係は単振動の合成などで必要となります．

証明

三角関数の合成の関係式を，天下り的に証明します．まず，つぎの図のような直角三角形を考えます．



ここで $r=\sqrt{a^2+b^2}$ と置きます．すると図から

$$\sin\phi = \frac{対辺}{斜辺} = \frac{b}{r}$$

$$\cos\phi = \frac{底辺}{斜辺} = \frac{a}{r}$$

ということが分かります．つぎに $r\sin(\theta+\phi)$ を加法定理で展開します．

$$r\sin(\theta+\phi) = r(\sin\theta\cos\phi + \cos\theta\sin\phi)$$

ここに先ほどの $\sin\phi$，$\cos\phi$ の値を代入して

$$\begin{aligned} r\sin(\theta+\phi) &= r\left(\sin\theta\cdot\frac{a}{r} + \cos\theta\cdot\frac{b}{r}\right) \\ &= a\sin\theta + b\cos\theta \end{aligned}$$

が得られ，冒頭で説明した関係式が正しいことが分かります．この関係式は，図と一緒に覚えておくと間違いがなくて良いです．

また，ϕ は

$$\sin\phi = \frac{b}{r}, \quad \cos\phi = \frac{a}{r}$$

の関係を満たす角度ですから，tan で表すと

$$\tan\phi = \frac{\sin\phi}{\cos\phi} = \frac{b}{a}$$

であり，$\phi =$ の形にするには逆三角関数にすれば良く，

$$\phi = \tan^{-1}\frac{b}{a}$$

と表せます．

単振動の例

例として，二つの単振動

$$A_1\sin(\omega t+\phi_1), \quad A_2\sin(\omega t+\phi_2)$$

を足し合わせて一つの単振動に合成してみます．まず，合成してできあがる単振動の式を

$$A\sin(\omega t+\phi)$$

と置いておきます．この段階では A と ϕ はどんな値なのか分かりません．未知数です．合成後の式を上のように置いたのですから，

$$A\sin(\omega t+\phi) = A_1\sin(\omega t+\phi_1) + A_2\sin(\omega t+\phi_2) \tag{1}$$

という方程式ができます．これから三角関数の合成をして，いま未知数と置いた A と ϕ を決めます．

加法定理で 式 (1) の右辺を展開し，整理します．

$$\begin{aligned} &A_1\sin(\omega t+\phi_1) + A_2\sin(\omega t+\phi_2) \\ &\quad = A_1(\sin\omega t\cos\phi_1 + \cos\omega t\sin\phi_1) + A_2(\sin\omega t\cos\phi_2 + \cos\omega t\sin\phi_2) \\ &\quad = (A_1\cos\phi_1 + A_2\cos\phi_2)\sin\omega t + (A_1\sin\phi_1 + A_2\sin\phi_2)\cos\omega t \end{aligned}$$

ここで,

$$A_1 \cos\phi_1 + A_2 \cos\phi_2 = a, \quad A_1 \sin\phi_1 + A_2 \sin\phi_2 = b$$

と書き換えてみますと 式 (1) は

$$A \sin(\omega t + \phi) = a \sin\omega t + b \cos\omega t$$

と書けます．これは三角関数の合成の式そのものですね．したがって

$$A = \sqrt{a^2 + b^2}, \quad \phi = \tan^{-1}\frac{b}{a}$$

です．a と b を元に戻すと

$$A = \sqrt{(A_1 \cos\phi_1 + A_2 \cos\phi_2)^2 + (A_1 \sin\phi_1 + A_2 \sin\phi_2)^2}$$
$$\phi = \tan^{-1}\frac{A_1 \sin\phi_1 + A_2 \sin\phi_2}{A_1 \cos\phi_1 + A_2 \cos\phi_2}$$

が得られます.