

逆行列のよく使う性質

クロメル@物理のかぎプロジェクト

2010-04-19

逆行列を掛けるということは、どういうことなのか。一つの解釈を書きたいとおもいます。

基本的性質

行列はベクトルを並べたものとして考えると、分かり易いです。

例えば,

$$\begin{aligned}
 A\mathbf{b}_1 &= \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ -1 & 4 & 5 \\ 1 & -2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \\
 &= 3 \times \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} - 1 \times \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix} + 2 \times \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 3 \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 11 \end{pmatrix}
 \end{aligned} \tag{1}$$

$$\begin{aligned}
 A\mathbf{b}_2 &= \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ -1 & 4 & 5 \\ 1 & -2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} + 1 \times \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix} + 1 \times \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 3 \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} 6 \\ 8 \\ 2 \end{pmatrix}
 \end{aligned} \tag{2}$$

$$\begin{aligned}
 Ab_3 &= \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ -1 & 4 & 5 \\ 1 & -2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix} \\
 &= 2 \times \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} + 4 \times \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix} - 1 \times \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 3 \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} 12 \\ 9 \\ -9 \end{pmatrix}
 \end{aligned} \tag{3}$$

という風に、行列と列ベクトルの積は、行列 A を列ベクトル $\mathbf{a}_i (i = 1, 2, 3)$ に分解し、右から掛ける列ベクトル $\mathbf{b}$ の成分をその係数にして掛け合わせたものとなります。

この三つの列ベクトルを並べて行列を作りますと、

$$\begin{aligned}
 AB &= \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ -1 & 4 & 5 \\ 1 & -2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & 4 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} 4 & 6 & 12 \\ 3 & 8 & 9 \\ 11 & 2 & -9 \end{pmatrix}
 \end{aligned} \tag{4}$$

逆行列

ここで、有限次元の行列 A を構成する列ベクトル $\mathbf{a}_i (i = 1, 2, 3)$ を並べたものとして、更に、 A が逆行列を持つ（正則である）と考えてみましょう^{*1}。 A の逆行列を A^{-1} と置きます。

すると、逆行列の定義から、

$$\begin{aligned}
 A^{-1}A &= A^{-1} \begin{pmatrix} \mathbf{a}_1 & \mathbf{a}_2 & \mathbf{a}_3 \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}
 \end{aligned} \tag{5}$$

つまり、これを分解すると、

$$\begin{aligned}
 A^{-1}\mathbf{a}_1 &= \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\
 A^{-1}\mathbf{a}_2 &= \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}
 \end{aligned} \tag{6}$$

^{*1} 行列は行基本変形や列基本変形で標準形を求めたとき、階数が行列の次元に等しいと正則といい、逆行列をもつのでした。

$$A^{-1}\mathbf{a}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

と成ります.

重ね合わせの原理

行列と列ベクトルは線形性を持ちます.

つまり, 行列 A, B とし, 列ベクトル $\mathbf{x}, \mathbf{y}$ は,

$$(A + B)\mathbf{x} = A\mathbf{x} + B\mathbf{x} \quad (7)$$

$$A(\mathbf{x} + \mathbf{y}) = A\mathbf{x} + A\mathbf{y} \quad (8)$$

が成り立ちます.

よって, 式 (6) の第一式に係数 x_1 を掛け, 第二式に x_2 を掛け, 第三式に x_3 を掛け足し合わせたものを作ると,

$$\begin{aligned} A^{-1}\mathbf{x} &= A^{-1}(x_1\mathbf{a}_1 + x_2\mathbf{a}_2 + x_3\mathbf{a}_3) \\ &= \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (9)$$

と成ります. つまり, 逆行列 A^{-1} は, 列ベクトル $\mathbf{x}$ を, 列ベクトル $\mathbf{a}_i$ の線形結合

$$\mathbf{x} = \sum_i x_i \mathbf{a}_i \quad (10)$$

として表した時の, $\mathbf{a}_i$ の係数を列ベクトルとして取り出す操作であることが分かります.

これで, 列ベクトル $\mathbf{x}$ の代わりに, 行列 X に作用させた時を考えると,

$$\begin{aligned} A^{-1}X &= A^{-1} \begin{pmatrix} x_1\mathbf{a}_1 + x_2\mathbf{a}_2 + x_3\mathbf{a}_3 & y_1\mathbf{a}_1 + y_2\mathbf{a}_2 + y_3\mathbf{a}_3 & z_1\mathbf{a}_1 + z_2\mathbf{a}_2 + z_3\mathbf{a}_3 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (11)$$

となる訳です.

その他応用例

ここで簡単な応用例を書きます. n 次元正方行列 A の固有ベクトルが, 次元の数 n 個あるとき, 固有値を λ_i , 固有ベクトルを $\mathbf{p}_i$ とします. 固有ベクトルを並べた n 次の行列を P とします. ここで, $P^{-1}AP$

という行列を考えると、

$$\begin{aligned} P^{-1}AP &= P^{-1} \begin{pmatrix} \lambda_1 \mathbf{p}_1 & \lambda_2 \mathbf{p}_2 & \cdots & \lambda_n \mathbf{p}_n \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_n \end{pmatrix} \end{aligned}$$

となり、対角化されることが分かりますね。

それでは、今日はこの辺で。