行列の積の表現方法

クロメル@物理のかぎプロジェクト

2012-11-01

行列をベクトルの集合と見た時の積の表現方法について書きます．短い記事です．

その一（内積の集合）

まずは一つ目，おそらく，これは皆さんよくご存じだと思います．３次の正方行列 A,B を，A は行ベクトルの集合，B は列ベクトルの集合と考えます．すると，普通のベクトルを列ベクトルとして，行ベクトルをその転置 (^{T}) として，

$$\begin{aligned} AB &= \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_{11} & b_{21} & b_{31} \\ b_{12} & b_{22} & b_{32} \\ b_{13} & b_{23} & b_{33} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \boldsymbol{a}_1^T \\ \boldsymbol{a}_2^T \\ \boldsymbol{a}_3^T \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \boldsymbol{b}_1 & \boldsymbol{b}_2 & \boldsymbol{b}_3 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \boldsymbol{a}_1 \cdot \boldsymbol{b}_1 & \boldsymbol{a}_1 \cdot \boldsymbol{b}_2 & \boldsymbol{a}_1 \cdot \boldsymbol{b}_3 \\ \boldsymbol{a}_2 \cdot \boldsymbol{b}_1 & \boldsymbol{a}_2 \cdot \boldsymbol{b}_2 & \boldsymbol{a}_2 \cdot \boldsymbol{b}_3 \\ \boldsymbol{a}_3 \cdot \boldsymbol{b}_1 & \boldsymbol{a}_3 \cdot \boldsymbol{b}_2 & \boldsymbol{a}_3 \cdot \boldsymbol{b}_3 \end{pmatrix} \end{aligned} \tag{1}$$

と，このように各成分がベクトルの内積になります．

その二（ダイアドの集合）

次は，３次の正方行列 A,B を，A は列ベクトルの集合，B は行ベクトルの集合と考えます．すると，

$$
\begin{aligned}
AB &= \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \\ \boldsymbol{a}_1 & \boldsymbol{a}_2 & \boldsymbol{a}_3 \\ \\ \end{pmatrix} \begin{pmatrix} & \boldsymbol{b}_1^T & \\ & \boldsymbol{b}_2^T & \\ & \boldsymbol{b}_3^T & \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} a_{11}b_{11} & a_{11}b_{12} & a_{11}b_{13} \\ a_{12}b_{11} & a_{12}b_{12} & a_{12}b_{13} \\ a_{13}b_{11} & a_{13}b_{12} & a_{13}b_{13} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_{21}b_{21} & a_{21}b_{22} & a_{21}b_{23} \\ a_{22}b_{21} & a_{22}b_{22} & a_{22}b_{23} \\ a_{23}b_{21} & a_{23}b_{22} & a_{23}b_{23} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_{31}b_{31} & a_{31}b_{32} & a_{31}b_{33} \\ a_{32}b_{31} & a_{32}b_{32} & a_{32}b_{33} \\ a_{33}b_{31} & a_{33}b_{32} & a_{33}b_{33} \end{pmatrix} \\
&= \sum_{i=1}^{3} \boldsymbol{a}_i \boldsymbol{b}_i
\end{aligned} \tag{2}
$$

となります．最後の表現は少し説明がいるかもしれません．

これはダイアド（ダイアド積，ダイアディックともいう）と言うもので，

$$
\boldsymbol{ab} = \begin{pmatrix} a_1b_1 & a_1b_2 & a_1b_3 \\ a_2b_1 & a_2b_2 & a_2b_3 \\ a_3b_1 & a_3b_2 & a_3b_3 \end{pmatrix}
$$

で定義されます．ベクトルを $\cdot, \times$ 等を使わずにただ並べる積です．関連記事として，続ベクトルの回転，正方行列の三連続積の展開 を挙げておきます．よかったら，そちらもご覧ください．

その３（列ベクトルの線形結合）

話はまだ続きます．では，A,B ともに列ベクトルだと見たらどうなるでしょうか？それは，

$$
\begin{aligned}
AB &= \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_{11} & b_{21} & b_{31} \\ b_{12} & b_{22} & b_{32} \\ b_{13} & b_{23} & b_{33} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \\ \boldsymbol{a}_1 & \boldsymbol{a}_2 & \boldsymbol{a}_3 \\ \\ \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \\ \boldsymbol{b}_1 & \boldsymbol{b}_2 & \boldsymbol{b}_3 \\ \\ \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \\ b_{11}\boldsymbol{a}_1 + b_{12}\boldsymbol{a}_2 + b_{13}\boldsymbol{a}_3 & b_{21}\boldsymbol{a}_1 + b_{22}\boldsymbol{a}_2 + b_{23}\boldsymbol{a}_3 & b_{31}\boldsymbol{a}_1 + b_{32}\boldsymbol{a}_2 + b_{33}\boldsymbol{a}_3 \\ \\ \end{pmatrix}
\end{aligned} \tag{3}
$$

とこの様になります．二つとも行ベクトルとして見たときについては，ご自分で計算してみてください．今度は，B の行ベクトルの線形結合が積の行列 AB の行ベクトルとなります．それでは，今日はこの辺で．お疲れ様でした．