誘電率と透磁率

クロメル@物理のかぎプロジェクト

2007-09-26

コンデンサに誘電率 ε の物質を挿入すると何が起こるか，また，ソレノイドに透磁率 μ の物質を挿入すると何が起こるか，について書きます．

電界と電束密度の関係

物質を作る原子は正の電荷を持つ原子核と負の電荷を持つ電子からなります．そこに外部から電界（もしくは電場とも） $\boldsymbol{E}$ をかけてやると，電界を打ち消す方向に原子核の周りの電子の分布が歪みます．これを分極と言います．分極を起こすと，その物質の両端に電界の方向とは逆向きに電荷が生じたように見えます．これを分極電荷 $\rho_P < 0$ と呼び，分極が作る電界ベクトルを分極ベクトル $\boldsymbol{P}$ と言います．分極ベクトルは負の分極電荷から正の分極電荷へと向いています．これに対し，外部の電圧を変化させることにより，制御できる電荷を真電荷（もしくは自由電荷とも） ρ_F と言います．

ガウスの法則の微分形に対応して，次の関係が成立します．

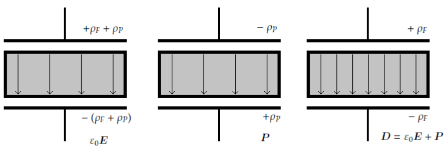
$$\mathrm{div}\varepsilon_0\boldsymbol{E} = \rho_F + \rho_P \tag{1}$$

$$-\mathrm{div}\boldsymbol{P} = \rho_P \tag{2}$$

$$\mathrm{div}(\varepsilon_0\boldsymbol{E} + \boldsymbol{P}) = \mathrm{div}\boldsymbol{D} = \rho_F \tag{3}$$

$$\boldsymbol{D} = \varepsilon_0\boldsymbol{E} + \boldsymbol{P} \tag{4}$$

ここで新しく定義されたベクトル量が電束密度 $\boldsymbol{D}$ です．これらを図にしたのが，下の図です．



コンデンサの直列つなぎ

面積 S のコンデンサが距離 $l_0 + l_\varepsilon$ の距離を空けて向かい合っているとします．そこに誘電率 ε，底面積 S，高さ d_ϵ の誘電体を挿入します．コンデンサの両端にたまった真電荷を ρ_F と置くと，コンデンサを水平に横切る面を上下させると，$\boldsymbol{D}$ は一定で，$\boldsymbol{E}$ は変化します．上下の電位差を V とすると，

$$\begin{aligned} V &= |\boldsymbol{E}_0| l_0 + |\boldsymbol{E}_\varepsilon| l_\varepsilon \\ &= \frac{l_0}{\varepsilon_0}|\boldsymbol{D}| + \frac{l_\varepsilon}{\varepsilon}|\boldsymbol{D}| \\ &\equiv \sum_i \frac{l_i}{\varepsilon_i}|\boldsymbol{D}| \end{aligned} \tag{5}$$

であります．ここで記号 $\equiv$ は，（左辺で右辺を，あるいは，右辺で左辺を）定義するということです．最後の行はコンデンサに層状の異なる複数の誘電体を挿入したものとして一般化してあります．その方が美しいからです．また，

$$|\boldsymbol{D}|S = \rho_F \tag{6}$$

ですから，$|\boldsymbol{D}|$ を消去して，

$$\begin{aligned} \rho_F &= \frac{V}{\sum_i \frac{l_i}{\varepsilon_i S}} \\ &\equiv CV \end{aligned} \tag{7}$$

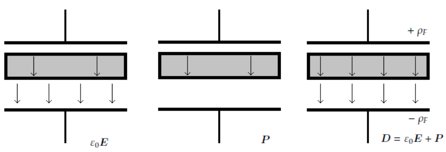
となります．ここで，電界 $\boldsymbol{E}$ は真空中と物質中でそれぞれ，

$$\boldsymbol{E}_i = \begin{cases} \dfrac{\boldsymbol{D}}{\varepsilon_0} & (\text{in} \;\; \varepsilon_0) \\ \dfrac{\boldsymbol{D}}{\varepsilon} & (\text{in} \;\; \varepsilon) \end{cases} \tag{8}$$

となります．そして，物質中の分極ベクトル $\boldsymbol{P}$ は，

$$\begin{aligned} \boldsymbol{P} &= \boldsymbol{D} - \varepsilon_0 \boldsymbol{E} \\ &= \left(\boldsymbol{D} - \varepsilon_0 \frac{\boldsymbol{D}}{\varepsilon}\right) \\ &= \left(1 - \frac{\varepsilon_0}{\varepsilon}\right)\frac{\rho_F}{S} \\ &> 0 \end{aligned} \tag{9}$$

この時の $\varepsilon_0 \boldsymbol{E}, \boldsymbol{P}, \boldsymbol{D}$ の様子は，下図のようになります．



ここで，式 (7) より，

$$C \equiv \left(\sum_i \frac{l_i}{\varepsilon_i S}\right)^{-1} \tag{10}$$

で静電容量 C を定義します．．これは，つまり $C_0 = \varepsilon_0 S/d_0$ と $C_\varepsilon = \varepsilon S/d_\varepsilon$ のコンデンサを直列につないだものに等しくなります（下図参照）．

コンデンサの並列つなぎ

今度は，底面積 S_ε で高さ l の円柱をした誘電体（誘電率 ε ）を，向かい合った幅 l 面積 $S_0 + S_\varepsilon$ のコンデンサに挿入することを考えます．印加されている電圧は V，たまっている真電荷は ρ_F とします．

すると，

$$\sum_i |\boldsymbol{D}_i| S_i = \rho_F \tag{11}$$

ですから，少し変形してやると，

$$\begin{aligned}
\sum_i |\boldsymbol{D}_i| S_i &= \sum_i \varepsilon_i S_i |\boldsymbol{E}| \\
&= \sum_i \frac{\varepsilon_i S_i}{l} V \qquad (\because V = |\boldsymbol{E}| l) \\
&= \rho_F
\end{aligned} \tag{12}$$

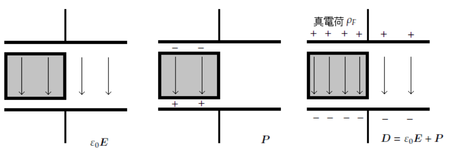
こんどは，一定なのは $\boldsymbol{E}$ の方で，

$$\boldsymbol{D}_i = \begin{cases} \varepsilon_0 \boldsymbol{E} & (\text{in} \ \ \varepsilon_0) \\ \varepsilon \boldsymbol{E} & (\text{in} \ \ \varepsilon) \end{cases} \tag{13}$$

物質中の $\boldsymbol{P}$ の様子は先ほどと同じ式で表されます．つまり，

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{P} &= \boldsymbol{D} - \varepsilon_0 \boldsymbol{E} \\
&= \left(\boldsymbol{D} - \varepsilon_0 \frac{\boldsymbol{D}}{\varepsilon}\right) \\
&= \left(1 - \frac{\varepsilon_0}{\varepsilon}\right) \frac{\rho_F}{S} \\
&> 0
\end{aligned} \tag{14}$$

となります．この様子を図にしたのが，下図です．



静電容量 C は，式 (12) より，

$$\rho_F = \sum_i \frac{\varepsilon_i S_i}{l} V \equiv CV \tag{15}$$

だから，今回は，

$$C \equiv \sum_i \frac{\varepsilon_i S_i}{l} \tag{16}$$