続・ベクトルの回転

クロメル@物理のかぎプロジェクト

2007-03-24

これは，Joh 氏の ベクトルの回転 の記事の続編です．次の記事は，続々ベクトルの回転 です．行列の回転を三次正方行列で表すと，意外ときれいな形でまとまったので書いてみました．

ベクトルの回転の行列表現

これから ベクトルの回転 で出た式を行列で表します．ではさっそく元の式を見てみましょう．

$$\boldsymbol{r}' = (\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{r})\boldsymbol{n} + [\boldsymbol{r} - (\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{r})\boldsymbol{n}]\cos\phi + (\boldsymbol{n}\times\boldsymbol{r})\sin\phi \tag{1}$$

ここで

$$\boldsymbol{r}' = \begin{pmatrix} r'_1 \\ r'_2 \\ r'_3 \end{pmatrix}$$

と，

$$\boldsymbol{r} = \begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \\ r_3 \end{pmatrix}$$

として，

$$\boldsymbol{n} = \begin{pmatrix} l \\ m \\ n \end{pmatrix}$$

とすると，

$$\begin{pmatrix} r'_1 \\ r'_2 \\ r'_3 \end{pmatrix} = \left[\boldsymbol{nn} + \cos\phi(I - \boldsymbol{nn}) + \sin\phi \begin{pmatrix} 0 & -n & m \\ n & 0 & -l \\ -m & l & 0 \end{pmatrix}\right] \begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \\ r_3 \end{pmatrix}$$

ここで，I は三次正方単位行列，また $\boldsymbol{nn}$ は

$$\boldsymbol{nn} = \begin{pmatrix} llmlnl \\ lmmmnm \\ lnmnnn \end{pmatrix}$$

となっていてこれをテンソルと考えた時，ダイアド積（別名として「テンソル積」単に「ダイアド」とも）と呼びます.

ダイアド積は，ドットでもクロスでもなくただベクトルを並べるだけで表し，二階のテンソルの表現の一種です.

$$\boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$$

と

$$\boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$$

に対し，ダイアド積 A は,

$$A = \boldsymbol{ab} = \{a_i b_j\} = \begin{pmatrix} a_1b_1 & a_1b_2 & a_1b_3 \\ a_2b_1 & a_2b_2 & a_2b_3 \\ a_3b_1 & a_3b_2 & a_3b_3 \end{pmatrix}$$

となります.

そして少ししつこいかもしれませんが,

$$A = \boldsymbol{a} \otimes \boldsymbol{b} = \sum_{i=1,2,3 \quad j=1,2,3} a_i b_j \boldsymbol{e}_i \otimes \boldsymbol{e}_j$$

とも書きます.

ところで,

$$N = \begin{pmatrix} 0 - nm \\ n0 - l \\ -ml0 \end{pmatrix}$$

と置くと,

$$N^2 = \begin{pmatrix} -m^2 - n^2 mlnl \\ lm - n^2 - l^2 nm \\ lnmn - l^2 - m^2 \end{pmatrix}$$

より，なんと

$$\boldsymbol{nn} = N^2 + (l^2 + m^2 + n^2)I = N^2 + I$$

となります．よって，最終的に次の形になります.

$$\boldsymbol{r}' = [I + N^2 + (-\cos\phi N^2 + \sin\phi N)]\boldsymbol{r}$$

ここで，$I\boldsymbol{r}$ は回転前のベクトル．他は，$N^2\boldsymbol{r}=\overrightarrow{PN}$ であり，$(-\cos\phi N^2+\sin\phi N)\boldsymbol{r}=\overrightarrow{NQ}$ です．

その他の嬉しいこと

余談ですが結構物理では外積 $\boldsymbol{n}\times$ の行列表現 N はもちろん $\boldsymbol{n}\times(\boldsymbol{n}\times)$ の行列表現 N^2 の形をしたものを目にすることが多いと思います．例えば遠心力は $-m\boldsymbol{\omega}\times(\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{r})$ という形をしていますし，慣性テンソル I を求める時，角運動量 L，角速度ベクトル $\boldsymbol{\omega}$ として，

$$\boldsymbol{L}=\sum_i m_i\boldsymbol{r}_i\times(\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{r}_i)=-\sum_i m_i\boldsymbol{r}_i\times(\boldsymbol{r}_i\times\boldsymbol{\omega})$$

に対して，

$$\boldsymbol{L}=I\boldsymbol{\omega}$$

が I の定義ですから，

$$\begin{pmatrix}L_x\\L_y\\L_z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\sum_i m_i(y_i^2+z_i^2) & -\sum_i m_ix_iy_i & -\sum_i m_ix_iz_i\\ -\sum_i m_iy_ix_i & \sum_i m_i(z_i^2+x_i^2) & -\sum_i m_iy_iz_i\\ -\sum_i m_iz_ix_i & -\sum_i m_iz_iy_i & \sum_i m_i(x_i^2+y_i^2)\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\omega_x\\\omega_y\\\omega_z\end{pmatrix}$$

これを知っていると戸惑うことはなくなると思います．

電磁気学でも

$$\begin{aligned}\nabla\times(\nabla\times\boldsymbol{A})&=\begin{pmatrix}0 & -\frac{\partial}{\partial z} & \frac{\partial}{\partial y}\\ \frac{\partial}{\partial z} & 0 & -\frac{\partial}{\partial x}\\ -\frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} & 0\end{pmatrix}^2\boldsymbol{A}\\
&=\left(\begin{pmatrix}\frac{\partial^2}{\partial x^2} & \frac{\partial^2}{\partial y\partial x} & \frac{\partial^2}{\partial z\partial x}\\ \frac{\partial^2}{\partial x\partial y} & \frac{\partial^2}{\partial y^2} & \frac{\partial^2}{\partial z\partial y}\\ \frac{\partial^2}{\partial x\partial z} & \frac{\partial^2}{\partial y\partial z} & \frac{\partial^2}{\partial z^2}\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2} & 0 & 0\\ 0 & \frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2} & 0\\ 0 & 0 & \frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}\end{pmatrix}\right)\boldsymbol{A}\\
&=\begin{pmatrix}\frac{\partial^2}{\partial x^2} & \frac{\partial^2}{\partial x\partial y} & \frac{\partial^2}{\partial x\partial z}\\ \frac{\partial^2}{\partial y\partial x} & \frac{\partial^2}{\partial y^2} & \frac{\partial^2}{\partial y\partial z}\\ \frac{\partial^2}{\partial z\partial x} & \frac{\partial^2}{\partial z\partial y} & \frac{\partial^2}{\partial z^2}\end{pmatrix}\boldsymbol{A}-\triangle\boldsymbol{A}\\
&=\begin{pmatrix}\frac{\partial}{\partial x}\\ \frac{\partial}{\partial y}\\ \frac{\partial}{\partial z}\end{pmatrix}\left(\frac{dA_x}{dx}+\frac{dA_y}{dy}+\frac{dA_z}{dz}\right)-\triangle\boldsymbol{A}\\
&=grad(div\boldsymbol{A})-\triangle\boldsymbol{A}\end{aligned}$$

という公式が少し考えるだけで書けるようになります．

追記：最後の電磁気学の例は，偏微分が交換できる時に限るようです．