

## 面と点の距離（非正則行列の逆行列）

クロメル@物理のかぎプロジェクト

2010-12-28

正方行列でない行列の逆行列とは，どんなものか．という疑問の答えの一つがこれです．

### 2つのベクトルの張る平面

三次元空間内で，原点を通る二本のベクトル  $\mathbf{a} = (a_1, a_2, a_3)^{T*1}$  と  $\mathbf{b} = (b_1, b_2, b_3)^T$  で張られる平面  $(x, y, z)^T = s\mathbf{a} + t\mathbf{b}$  と，点 P  $\mathbf{r} = (x, y, z) = (x_0, y_0, z_0)^T$  との距離  $X$  が最短距離を示す時の  $s$  と  $t$  の値を求めます．つまり，

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} s \\ t \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix} \leftrightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix} \quad (1)$$

が最も近づく時を考えます．

それには，距離  $X^2$  が最小値を取る時を考えればよいです．つまりは， $s, t$  の二次式なので，平方完成を行います．実際に計算してみると，

$$\begin{aligned} X^2 &= (x_1 - x_0)^2 + (y_1 - y_0)^2 + (z_1 - z_0)^2 \\ &= (a_1s + b_1t - x_0)^2 + (a_2s + b_2t - y_0)^2 + (a_3s + b_3t - z_0)^2 \\ &= (a_1^2 + a_2^2 + a_3^2)s^2 + 2(a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3)st + (b_1^2 + b_2^2 + b_3^2)t^2 \\ &\quad - 2(a_1x_0 + a_2y_0 + a_3z_0)s - 2(b_1x_0 + b_2y_0 + b_3z_0)t + (x_0^2 + y_0^2 + z_0^2) \\ &= |\mathbf{a}|^2s^2 + 2\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}st + |\mathbf{b}|^2t^2 - 2\mathbf{a} \cdot \mathbf{r}s - 2\mathbf{b} \cdot \mathbf{r}t + |\mathbf{r}|^2 \\ &\equiv \alpha s^2 + 2\beta st + \gamma t^2 - 2\delta s - 2\epsilon t + \zeta \end{aligned} \quad (2)$$

最後の行で，ギリシャ文字  $\alpha, \beta, \dots, \zeta$  を定義しました．順番に，アルファ，ベータ，ガンマ，デルタ，イ

\*1 右上の  $T$  は，転置を表します．

プシロン，ゼータと読みます．さらに計算を続けると，

$$\begin{aligned}
 X^2 &= \alpha s^2 + 2\beta st + \gamma t^2 - 2\delta s - 2\epsilon t + \zeta \\
 &= \alpha \left( s + \frac{\beta t - \delta}{\alpha} \right)^2 - \frac{(\beta t - \delta)^2}{\alpha} + \gamma t^2 - 2\epsilon t + \zeta \\
 &= \alpha \left( s + \frac{\beta t - \delta}{\alpha} \right)^2 + \left( \gamma - \frac{\beta^2}{\alpha} \right) t^2 + 2 \left( \frac{\beta\delta}{\alpha} - \epsilon \right) t + \zeta - \frac{\delta^2}{\alpha} \\
 &= \alpha \left( s + \frac{\beta t - \delta}{\alpha} \right)^2 + \left( \gamma - \frac{\beta^2}{\alpha} \right) \left( t + \frac{\frac{\beta\delta}{\alpha} - \epsilon}{\gamma - \frac{\beta^2}{\alpha}} \right)^2 \zeta - \frac{\delta^2}{\alpha} - \frac{\left( \frac{\beta\delta}{\alpha} - \epsilon \right)^2}{\gamma - \frac{\beta^2}{\alpha}} \\
 &= \alpha \left( s + \frac{\beta t - \delta}{\alpha} \right)^2 + \left( t + \frac{\beta\delta - \epsilon\alpha}{\alpha\gamma - \beta^2} \right)^2 + \zeta - \frac{\delta^2(\alpha\gamma - \beta^2)}{\alpha(\alpha\gamma - \beta^2)} - \frac{\beta^2\delta^2 - 2\alpha\beta\delta\epsilon + \epsilon^2\alpha^2}{\alpha(\alpha\gamma - \beta^2)} \\
 &= \alpha \left( s + \frac{\beta t - \delta}{\alpha} \right)^2 + \left( t + \frac{\beta\delta - \epsilon\alpha}{\alpha\gamma - \beta^2} \right)^2 + \zeta - \frac{\alpha\epsilon^2 - 2\beta\delta\epsilon + \gamma\delta^2}{\alpha\gamma - \beta^2} \tag{3}
 \end{aligned}$$

と，この様になります．最後の行の最初から二つの項は  $\theta$  をベクトル  $\mathbf{a}$  と  $\mathbf{b}$  の成す角として， $\alpha = |\mathbf{a}|^2 \neq 0$  かつ， $\alpha\gamma - \beta^2 = |\mathbf{a}|^2|\mathbf{b}|^2 - (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})^2 = |\mathbf{a}|^2|\mathbf{b}|^2(1 - \cos^2\theta) = |\mathbf{a}|^2|\mathbf{b}|^2\sin^2\theta = |\mathbf{a} \times \mathbf{b}|^2 \neq 0$  の時（つまり， $\mathbf{a} \neq 0$  かつ，ベクトル  $\mathbf{a}$  と  $\mathbf{b}$  の成す角が  $0$  や  $\pi$  でない時）に，ゼロにすることができて，その時の  $s, t$  が知りたいのです．

## s と t の決定

ここで， $s$  と  $t$  を決定する（二乗内の値をゼロにする）行列を書きだすと，

$$\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ 0 & \alpha\gamma - \beta^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} s \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \delta \\ \epsilon\alpha - \beta\delta \end{pmatrix} \tag{4}$$

逆に解いて，

$$\begin{aligned}
 \begin{pmatrix} s \\ t \end{pmatrix} &= \frac{1}{\alpha(\alpha\gamma - \beta^2)} \begin{pmatrix} \alpha\gamma - \beta^2 & -\beta \\ 0 & \alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \delta \\ \epsilon\alpha - \beta\delta \end{pmatrix} \\
 &= \frac{1}{\alpha(\alpha\gamma - \beta^2)} \begin{pmatrix} (\alpha\gamma - \beta^2)\delta - (\epsilon\alpha - \beta\delta)\beta \\ \alpha(\epsilon\alpha - \beta\delta) \end{pmatrix} \\
 &= \frac{1}{\alpha\gamma - \beta^2} \begin{pmatrix} \gamma\delta - \beta\epsilon \\ \alpha\epsilon - \beta\delta \end{pmatrix} \tag{5}
 \end{aligned}$$

## ベクトルでの表記

ここから，ベクトルを使って表現することにします．

$$\begin{pmatrix} s \\ t \end{pmatrix} = \frac{1}{|\mathbf{a} \times \mathbf{b}|^2} \begin{pmatrix} |\mathbf{b}|^2(\mathbf{a} \cdot \mathbf{r}) - (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})(\mathbf{b} \cdot \mathbf{r}) \\ |\mathbf{a}|^2(\mathbf{b} \cdot \mathbf{r}) - (\mathbf{b} \cdot \mathbf{a})(\mathbf{a} \cdot \mathbf{r}) \end{pmatrix} \tag{6}$$

ここで、ベクトルの演算を練習しておきます．スカラー三重積は、

$$\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c} \quad (7)$$

と言うように、スカラー積とベクトル積の入れ替えができます．そして、ベクトル三重積は、

$$(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \times \mathbf{c} = \mathbf{b}(\mathbf{a} \cdot \mathbf{c}) - \mathbf{a}(\mathbf{b} \cdot \mathbf{c}) \quad (8)$$

ですから、これと新たなベクトル  $\mathbf{d}$  とのスカラー積をとって、

$$(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \times \mathbf{c} \cdot \mathbf{d} = (\mathbf{a} \cdot \mathbf{c})(\mathbf{b} \cdot \mathbf{d}) - (\mathbf{a} \cdot \mathbf{d})(\mathbf{b} \cdot \mathbf{c}) \quad (9)$$

これと、式(6)の右辺の上段を見比べて、

$$(\mathbf{b} \cdot \mathbf{b})(\mathbf{a} \cdot \mathbf{r}) - (\mathbf{b} \cdot \mathbf{r})(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}) = (\mathbf{b} \times \mathbf{a}) \times \mathbf{b} \cdot \mathbf{r} \quad (10)$$

下段は、これの  $\mathbf{a}$  と  $\mathbf{b}$  を入れ替えたものだから、式(6)は、

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} s \\ t \end{pmatrix} &= \frac{1}{|\mathbf{a} \times \mathbf{b}|^2} \begin{pmatrix} (\mathbf{b} \times \mathbf{a}) \times \mathbf{b} \cdot \mathbf{r} \\ (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \times \mathbf{a} \cdot \mathbf{r} \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{|\mathbf{a} \times \mathbf{b}|^2} \begin{pmatrix} -(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \times \mathbf{b} \cdot \mathbf{r} \\ (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \times \mathbf{a} \cdot \mathbf{r} \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (11)$$

となります．そして、

$$\mathbf{p} \equiv \mathbf{a} \times \mathbf{b} = \begin{pmatrix} a_2 b_3 - a_3 b_2 \\ a_3 b_1 - a_1 b_3 \\ a_1 b_2 - a_2 b_1 \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} l \\ m \\ n \end{pmatrix} \quad (12)$$

であります．ここで、もう一つの外積の行列での表現、

$$-\mathbf{p} \times \mathbf{b} = - \begin{pmatrix} 0 & -n & m \\ n & 0 & -l \\ -m & l & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} \quad (13)$$

を用います．これは、三次元の列ベクトルなので、 $\mathbf{r}$  との内積を取る為に、転置します．

$$\begin{aligned} -\mathbf{p} \times \mathbf{b} \cdot \mathbf{r} &= - \begin{pmatrix} b_1 & b_2 & b_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & n & -m \\ -n & 0 & l \\ m & -l & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} b_1 & b_2 & b_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -n & m \\ n & 0 & -l \\ -m & l & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (14)$$

式(6)の下段は、同様に  $\mathbf{a}$  と  $\mathbf{b}$  を入れ替えればよく、以上をまとめて書けば、

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} s \\ t \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix} \leftrightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix} \quad (15)$$

の距離が最小になる解は，

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} s \\ t \end{pmatrix} &= \frac{1}{|\mathbf{a} \times \mathbf{b}|^2} \begin{pmatrix} -(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \times \mathbf{b} \cdot \mathbf{r} \\ (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \times \mathbf{a} \cdot \mathbf{r} \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{|\mathbf{a} \times \mathbf{b}|^2} \begin{pmatrix} b_1 & b_2 & b_3 \\ -a_1 & -a_2 & -a_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -n & m \\ n & 0 & -l \\ -m & l & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (16)$$

ただし，

$$\begin{pmatrix} l \\ m \\ n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_2 b_3 - a_3 b_2 \\ a_3 b_1 - a_1 b_3 \\ a_1 b_2 - a_2 b_1 \end{pmatrix} \quad (17)$$

であり，その時の最短距離  $X^2$  は，式 (3) の一番最後の行から，

$$\begin{aligned} X^2 &= \zeta - \frac{\alpha\varepsilon^2 - 2\beta\delta\varepsilon + \gamma\delta^2}{\alpha\gamma - \beta^2} \\ &= |\mathbf{r}^2| - \frac{|\mathbf{a}|^2(\mathbf{b} \cdot \mathbf{r})^2 - 2(\mathbf{b} \cdot \mathbf{r})(\mathbf{a} \cdot \mathbf{r})(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}) + |\mathbf{b}|^2(\mathbf{a} \cdot \mathbf{r})^2}{|\mathbf{a} \times \mathbf{b}|^2} \end{aligned}$$

となります．以上でこの記事は終わりです．これより次元が高い場合も，いつか計算してみたいです．それでは，今日はこの辺で．