剛体のオイラー角でのハミルトニアンを解く

クロメル@物理のかぎプロジェクト

2010-03-03

剛体の回転シリーズ番外編 3 です．せっかく番外編 2 で剛体のハミルトニアンを求めたので，剛体のハミルトニアンを解いてトルクのかからない剛体の運動方程式を導いてみました．

復習

まず，ハミルトニアンを確認します．剛体のハミルトニアンを次のようなものでした．

$$
\begin{aligned}
H &= \frac{1}{2I_x \sin^2\theta}\{(p_\phi - \cos\theta p_\psi)\cos\psi - \sin\theta\sin\psi p_\theta\}^2 \\
&\quad + \frac{1}{2I_y \sin^2\theta}\{(p_\phi - \cos\theta p_\psi)\sin\psi + \sin\theta\cos\psi p_\theta\}^2 \\
&\quad + \frac{p_\psi^2}{2I_z}
\end{aligned} \tag{1}
$$

パラメータ λ に対して，

$$
\dot{\lambda} = \frac{\partial H}{\partial p_\lambda} \tag{2}
$$

$$
\dot{p}_\lambda = -\frac{\partial H}{\partial \lambda} \tag{3}
$$

です．

ハミルトニアンの運動量での微分

それでは，さっそく式 (2) を求めてみましょう．

$$
\begin{aligned}
\dot{\phi} &= \frac{\partial H}{\partial p_\phi} \\
&= \frac{1}{I_x \sin^2\theta}\cos\psi\{(p_\phi - \cos\theta p_\psi)\cos\psi - \sin\theta\sin\psi p_\theta\} \\
&\quad + \frac{1}{I_y \sin^2\theta}\sin\psi\{(p_\phi - \cos\theta p_\psi)\sin\psi + \sin\theta\cos\psi p_\theta\}
\end{aligned} \tag{4}
$$

ここで，次のように α,β,γ を定義します．

$$\alpha = \frac{\cos^2\psi}{I_x} + \frac{\sin^2\psi}{I_y} \tag{5}$$

$$\beta = \frac{1}{I_y} - \frac{1}{I_x} \tag{6}$$

$$\gamma = \frac{\sin^2\psi}{I_x} + \frac{\cos^2\psi}{I_y} \tag{7}$$

すると，式 (4) は，次のようになります．

$$\dot\phi = \frac{1}{\sin^2\theta}\alpha\ p_\phi + \frac{\sin\psi\cos\psi}{\sin\theta}\beta\ p_\theta - \frac{\cos\theta}{\sin^2\theta}\alpha\ p_\psi \tag{8}$$

同様に，$\dot\theta,\dot\psi$ についても，

$$\begin{aligned}\dot\theta &= \frac{1}{I_x\sin^2\theta}\{(p_\phi-\cos\theta p_\psi)\cos\psi-\sin\theta\sin\psi p_\theta\}\times(-\sin\theta\sin\psi)\\ &+\frac{1}{I_y\sin^2\theta}\{(p_\phi-\cos\theta p_\psi)\sin\psi+\sin\theta\cos\psi p_\theta\}\times(\sin\theta\cos\psi)\\ &=\frac{\sin\psi\cos\psi}{\sin\theta}\beta p_\phi+\gamma p_\theta-\frac{\sin\psi\cos\psi\cos\theta}{\sin\theta}\beta p_\psi\end{aligned} \tag{9}$$

$$\begin{aligned}\dot\psi &= \frac{1}{I_x\sin^2\theta}\{(p_\phi-\cos\theta p_\psi)\cos\psi-\sin\theta\sin\psi p_\theta\}\times(-\cos\psi\cos\theta)\\ &+\frac{1}{I_y\sin^2\theta}\{(p_\phi-\cos\theta p_\psi)\sin\psi+\sin\theta\sin\psi p_\theta\}\times(-\sin\psi\cos\theta)\\ &+\frac{p_\psi}{I_z}\\ &=\frac{-\cos\theta}{\sin^2\theta}\alpha\ p_\phi-\frac{\sin\psi\cos\psi\cos\theta}{\sin\theta}\beta\ p_\theta+(\frac{1}{I_z}+\frac{\cos^2\theta}{\sin^2\theta}\alpha)p_\psi\end{aligned} \tag{10}$$

これらを行列で表示すると，

$$\begin{aligned}\begin{pmatrix}\dot\phi\\ \dot\theta\\ \dot\psi\end{pmatrix} &= \begin{pmatrix}\frac{1}{\sin^2\theta}\alpha & \frac{\sin\psi\cos\psi}{\sin\theta}\beta & -\frac{\cos\theta}{\sin^2\theta}\alpha\\ \frac{\sin\psi\cos\psi}{\sin\theta}\beta & \gamma & -\frac{\sin\psi\cos\psi\cos\theta}{\sin\theta}\beta\\ -\frac{\cos\theta}{\sin^2\theta}\alpha & -\frac{\sin\psi\cos\psi\cos\theta}{\sin\theta}\beta & \frac{1}{I_z}+\frac{\cos^2\theta}{\sin^2\theta}\alpha\end{pmatrix}\begin{pmatrix}p_\phi\\ p_\theta\\ p_\psi\end{pmatrix}\\ &\equiv V\begin{pmatrix}p_\phi\\ p_\theta\\ p_\psi\end{pmatrix}\end{aligned} \tag{11}$$

となります．行列部分を，V で定義しました．

ハミルトニアンの位置座標での微分

次は，式 (3) を計算していきます．まずは $\dot{p}_\phi$ を求める作業から，これはハミルトニアンが ϕ を含まないので簡単ですね．

$$\dot{p}_\phi = -\frac{\partial H}{\partial \phi} = 0 \tag{12}$$

次に，$\dot{p}_\theta$ を求めます．これは，すこし面倒です．

$$\begin{aligned}
\dot{p}_\theta &= -\frac{\partial H}{\partial \theta} \\
&= \frac{\cos\theta}{I_x \sin^3\theta}\{(p_\phi - \cos\theta p_\psi)\cos\psi - \sin\theta\sin\psi p_\theta\}^2 \\
&- \frac{1}{I_x \sin^2\theta}\{(p_\phi - \cos\theta p_\psi)\cos\psi - \sin\theta\sin\psi p_\theta\}(\cos\psi\sin\theta p_\psi - \cos\theta\sin\psi p_\theta) \\
&+ \frac{\cos\theta}{I_y \sin^3\theta}\{(p_\phi - \cos\theta p_\psi)\sin\psi + \sin\theta\cos\psi p_\theta\}^2 \\
&- \frac{1}{I_y \sin^2\theta}\{(p_\phi - \cos\theta p_\psi)\cos\psi + \sin\theta\cos\psi p_\theta\}(\sin\psi\sin\theta p_\psi + \cos\theta\cos\psi p_\theta) \\
&= \frac{\cos\theta}{\sin^3\theta}\alpha\ p_\phi^2 \\
&+ \frac{\sin\psi\cos\psi\cos\theta}{\sin^2\theta}\beta\ p_\phi p_\theta \\
&- \frac{1+\cos^2\theta}{\sin^3\theta}\alpha\ p_\phi p_\psi \\
&+ 0 \times p_\theta^2 \\
&- \frac{\sin\psi\cos\psi}{\sin^2\theta}\beta\ p_\theta p_\psi \\
&+ \frac{\cos\theta}{\sin^3\theta}\alpha\ p_\psi^2
\end{aligned} \tag{13}$$

式 (12) を二次形式の行列を使って表すと，

$$\begin{aligned}
\dot{p}_\theta &= \begin{pmatrix} p_\phi & p_\theta & p_\psi \end{pmatrix}
\begin{pmatrix}
\dfrac{\cos\theta}{\sin^3\theta}\alpha & \dfrac{\sin\psi\cos\psi\cos\theta}{2\sin^2\theta}\beta & -\dfrac{1+\cos^2\theta}{2\sin^3\theta}\alpha \\
\dfrac{\sin\psi\cos\psi\cos\theta}{2\sin^2\theta}\beta & 0 & -\dfrac{\sin\psi\cos\psi}{2\sin^2\theta}\beta \\
-\dfrac{1+\cos^2\theta}{2\sin^3\theta}\alpha & -\dfrac{\sin\psi\cos\psi}{2\sin^2\theta}\beta p_\theta & \dfrac{\cos\theta}{\sin^3\theta}\alpha
\end{pmatrix}
\begin{pmatrix} p_\phi \\ p_\theta \\ p_\psi \end{pmatrix} \\
&\equiv \begin{pmatrix} p_\phi & p_\theta & p_\psi \end{pmatrix} \Theta \begin{pmatrix} p_\phi \\ p_\theta \\ p_\psi \end{pmatrix}
\end{aligned} \tag{14}$$

上の式の最後で，行列部分を Θ を使って定義しました．

同様に，$\dot{p}_\psi$ を求めると，

$$
\begin{aligned}
\dot{p}_\psi &= -\frac{\partial H}{\partial \psi} \\
&= \frac{-1}{I_x \sin^2\theta}\{(p_\phi - \cos\theta p_\psi)\cos\psi - \sin\theta\sin\psi p_\theta\}\{-(p_\phi - \cos\theta p_\psi)\sin\psi - \sin\theta\cos\psi p_\theta\} \\
&+ \frac{-1}{I_y \sin^2\theta}\{(p_\phi - \cos\theta p_\psi)\sin\psi + \sin\theta\cos\psi p_\theta\}\{(p_\phi - \cos\theta p_\psi)\cos\psi - \sin\theta\sin\psi p_\theta\} \\
&= -\frac{\sin\psi\cos\psi}{\sin^2\theta}\beta\ p_\phi^2 + \frac{-\cos^2\psi + \sin^2\psi}{\sin\theta}\beta\ p_\phi p_\theta \\
&+ \frac{2\cos\theta\sin\psi\cos\psi}{\sin^2\theta}\beta\ p_\phi p_\psi + \sin\psi\cos\psi\beta\ p_\theta^2 \\
&+ \frac{\cos\theta}{\sin\theta}(\cos^2\psi - \sin^2\psi)\beta\ p_\theta p_\psi - \frac{\cos^2\theta}{\sin^2\theta}\sin\psi\cos\psi\beta\ p_\psi^2 \\
&= \begin{pmatrix} p_\phi & p_\theta & p_\psi \end{pmatrix}
\begin{pmatrix}
-\dfrac{\sin\psi\cos\psi}{\sin^2\theta}\beta & \dfrac{\alpha-\gamma}{2\sin\theta} & \dfrac{\cos\theta\sin\psi\cos\psi}{\sin^2\theta}\beta \\
\dfrac{\alpha-\gamma}{2\sin\theta} & \sin\psi\cos\psi\beta & \dfrac{\cos\theta(\gamma-\alpha)}{2\sin\theta} \\
\dfrac{\cos\theta\sin\psi\cos\psi}{\sin^2\theta}\beta & \dfrac{\cos\theta(\gamma-\alpha)}{2\sin\theta} & -\dfrac{\cos^2\theta\sin\psi\cos\psi}{\sin^2\theta}\beta
\end{pmatrix}
\begin{pmatrix} p_\phi \\ p_\theta \\ p_\psi \end{pmatrix} \\
&\equiv \begin{pmatrix} p_\phi & p_\theta & p_\psi \end{pmatrix} \Psi \begin{pmatrix} p_\phi \\ p_\theta \\ p_\psi \end{pmatrix}
\end{aligned} \tag{15}
$$

となります．ちなみに，

$$(\cos^2\psi - \sin^2\psi)\beta = \gamma - \alpha \tag{16}$$

です．

大まかな流れ

さて，これからの大まかな流れを書いていきます．まず，式 (11) を逆に解きます．つまり，

$$\begin{pmatrix} p_\phi \\ p_\theta \\ p_\psi \end{pmatrix} = V^{-1} \begin{pmatrix} \dot{\phi} \\ \dot{\theta} \\ \dot{\psi} \end{pmatrix} \tag{17}$$

を計算します．

次にこれを使って式 (14) と式 (15) から，p_λ を消去します．さらに，式 (17) を t で微分して，

$$\begin{pmatrix} \dot{p}_\phi \\ \dot{p}_\theta \\ \dot{p}_\psi \end{pmatrix} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(V^{-1}) \begin{pmatrix} \dot{\phi} \\ \dot{\theta} \\ \dot{\psi} \end{pmatrix} + V^{-1} \begin{pmatrix} \ddot{\phi} \\ \ddot{\theta} \\ \ddot{\psi} \end{pmatrix} \tag{18}$$

最後に，これを

$$\begin{pmatrix} \ddot{\phi} \\ \ddot{\theta} \\ \ddot{\psi} \end{pmatrix}$$

について解けば，運動方程式が完成します．つまり，

$$\begin{pmatrix}\ddot{\phi}\\ \ddot{\theta}\\ \ddot{\psi}\end{pmatrix}=V\begin{pmatrix}\dot{p}_\phi(\dot{\phi},\dot{\theta},\dot{\psi})\\ \dot{p}_\theta(\dot{\phi},\dot{\theta},\dot{\psi})\\ \dot{p}_\psi(\dot{\phi},\dot{\theta},\dot{\psi})\end{pmatrix}-V\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(V^{-1})\begin{pmatrix}\dot{\phi}\\ \dot{\theta}\\ \dot{\psi}\end{pmatrix}\tag{19}$$

ここで，式 (12) , (14) , (15) を使って，$\dot{p}_\lambda$ を消去したことを強調して置きます．ちなみに，式 (11) の両辺を t で微分して，

$$\begin{pmatrix}\ddot{\phi}\\ \ddot{\theta}\\ \ddot{\psi}\end{pmatrix}=V\begin{pmatrix}\dot{p}_\phi(\dot{\phi},\dot{\theta},\dot{\psi})\\ \dot{p}_\theta(\dot{\phi},\dot{\theta},\dot{\psi})\\ \dot{p}_\psi(\dot{\phi},\dot{\theta},\dot{\psi})\end{pmatrix}+\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(V)\begin{pmatrix}p_\phi\\ p_\theta\\ p_\psi\end{pmatrix}\tag{20}$$

そして，式 (17) を使って，式 (20) から，p_λ を消去したもの，つまり，

$$\begin{pmatrix}\ddot{\phi}\\ \ddot{\theta}\\ \ddot{\psi}\end{pmatrix}=V\begin{pmatrix}\dot{p}_\phi(\dot{\phi},\dot{\theta},\dot{\psi})\\ \dot{p}_\theta(\dot{\phi},\dot{\theta},\dot{\psi})\\ \dot{p}_\psi(\dot{\phi},\dot{\theta},\dot{\psi})\end{pmatrix}+\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(V)V^{-1}\begin{pmatrix}\dot{\phi}\\ \dot{\theta}\\ \dot{\psi}\end{pmatrix}\tag{21}$$

も見かけは違いますが，

$$VV^{-1}=I\tag{22}$$

の両辺を t で微分してやれば，

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(V)V^{-1}+V\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(V^{-1})=0\tag{23}$$

となって，同じ方程式を与えることが分かります．

計算の実行

まず，さっき考えた通り，式 (14) と式 (15) から，$\dot{p}_\lambda$ を消去します．それには V の逆行列 V^{-1} が必要ですので，それを求めます．V は次の形をしていました．

$$\begin{pmatrix}\dot{\phi}\\ \dot{\theta}\\ \dot{\psi}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\dfrac{1}{\sin^2\theta}\alpha & \dfrac{\sin\psi\cos\psi}{\sin\theta}\beta & -\dfrac{\cos\theta}{\sin^2\theta}\alpha\\ \dfrac{\sin\psi\cos\psi}{\sin\theta}\beta & \gamma & -\dfrac{\sin\psi\cos\psi\cos\theta}{\sin\theta}\beta\\ -\dfrac{\cos\theta}{\sin^2\theta}\alpha & -\dfrac{\sin\psi\cos\psi\cos\theta}{\sin\theta}\beta & \dfrac{1}{I_z}+\dfrac{\cos^2\theta}{\sin^2\theta}\alpha\end{pmatrix}\begin{pmatrix}p_\phi\\ p_\theta\\ p_\psi\end{pmatrix}\tag{11}$$

長くなるので，計算過程は省略します．逆行列は，例えば余因子行列を求める方法で求めてください．

$$\alpha\gamma-\sin^2\psi\cos^2\psi\beta=\frac{1}{I_xI_y}$$

に注意すれば，

$$\begin{aligned}\begin{pmatrix}p_\phi\\ p_\theta\\ p_\psi\end{pmatrix}&=V^{-1}\begin{pmatrix}\dot{\phi}\\ \dot{\theta}\\ \dot{\psi}\end{pmatrix}\\ &=\begin{pmatrix}I_xI_y\sin^2\theta\gamma+I_z\cos^2\theta & -I_xI_y\sin\psi\cos\psi\sin\theta\beta & I_z\cos\theta\\ -I_xI_y\sin\psi\cos\psi\sin\theta\beta & I_xI_y\alpha & 0\\ I_z\cos\theta & 0 & I_z\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\dot{\phi}\\ \dot{\theta}\\ \dot{\psi}\end{pmatrix}\end{aligned}\tag{24}$$

となります．すると，正方行列の三連続積の展開 を利用して，

$$
\begin{aligned}
\dot{p}_\theta &= \begin{pmatrix} p_\phi & p_\theta & p_\psi \end{pmatrix} \Theta \begin{pmatrix} p_\phi \\ p_\theta \\ p_\psi \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \dot{\phi} & \dot{\theta} & \dot{\psi} \end{pmatrix} V^{-1}\Theta V^{-1} \begin{pmatrix} \dot{\phi} \\ \dot{\theta} \\ \dot{\psi} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \dot{\phi} & \dot{\theta} & \dot{\psi} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_xI_y\sin\theta\cos\theta\gamma - I_z\sin\theta\cos\theta & -\frac{1}{2}I_xI_y\sin\psi\cos\psi\cos\theta\beta & -\frac{I_z}{2}\sin\theta \\ -\frac{1}{2}I_xI_y\sin\psi\cos\psi\cos\theta\beta & 0 & 0 \\ -\frac{I_z}{2}\sin\theta & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{\phi} \\ \dot{\theta} \\ \dot{\psi} \end{pmatrix}
\end{aligned}
\tag{25}
$$

また，$\dot{p}_\psi$ についても，

$$
\begin{aligned}
\dot{p}_\psi &= \begin{pmatrix} p_\phi & p_\theta & p_\psi \end{pmatrix} \Psi \begin{pmatrix} p_\phi \\ p_\theta \\ p_\psi \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \dot{\phi} & \dot{\theta} & \dot{\psi} \end{pmatrix} V^{-1}\Psi V^{-1} \begin{pmatrix} \dot{\phi} \\ \dot{\theta} \\ \dot{\psi} \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{pmatrix} \dot{\phi} & \dot{\theta} & \dot{\psi} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -I_xI_y\sin\psi\cos\psi\sin^2\theta\beta & -\frac{1}{2}I_xI_y\cos 2\psi\sin\theta\beta & 0 \\ -\frac{1}{2}I_xI_y\cos 2\psi\sin\theta\beta & I_xI_y\sin\psi\cos\psi\beta & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{\phi} \\ \dot{\theta} \\ \dot{\psi} \end{pmatrix} \tag{26}
$$

次に，V^{-1} の時間微分を求めます．記法の簡単のため，

$$
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(V^{-1}) = T \tag{27}
$$

とします．

$$
V^{-1} = \begin{pmatrix} I_xI_y\sin^2\theta\gamma + I_z\cos^2\theta & -I_xI_y\sin\psi\cos\psi\sin\theta\beta & I_z\cos\theta \\ -I_xI_y\sin\psi\cos\psi\sin\theta\beta & I_xI_y\alpha & 0 \\ I_z\cos\theta & 0 & I_z \end{pmatrix} \tag{28}
$$

でしたので，

$$
\frac{\mathrm{d}\alpha}{\mathrm{d}t} = 2\cos\psi\sin\psi\dot{\psi}\beta \tag{29}
$$

$$
\frac{\mathrm{d}\gamma}{\mathrm{d}t} = -2\cos\psi\sin\psi\dot{\psi}\beta \tag{30}
$$

に注意すれば，

$$
\begin{aligned}
T_{11} &= 2(I_xI_y\sin\theta\cos\theta\gamma - I_z\sin\theta\cos\theta)\dot{\theta} \\
&\quad - 2I_xI_y\sin^2\theta\sin\psi\cos\psi\beta\dot{\psi}
\end{aligned}
\tag{31}
$$

$$\begin{aligned} T_{12} &= T_{21} \\ &= -\cos 2\psi \sin\theta I_x I_y \beta \dot{\psi} - \sin\psi\cos\psi\cos\theta I_x I_y \beta \dot{\theta} \end{aligned} \tag{32}$$

$$\begin{aligned} T_{13} &= T_{31} \\ &= -I_z \sin\theta \dot{\theta} \end{aligned} \tag{33}$$

$$T_{22} = 2 I_x I_y \sin\psi\cos\psi\beta\dot{\psi} \tag{34}$$

$$T_{23} = T_{32} = T_{33} = 0 \tag{35}$$

ここで，

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} \ddot{\phi} \\ \ddot{\theta} \\ \ddot{\psi} \end{pmatrix} &= V\Big(\begin{pmatrix} \dot{p}_\phi(\dot{\phi},\dot{\theta},\dot{\psi}) \\ \dot{p}_\theta(\dot{\phi},\dot{\theta},\dot{\psi}) \\ \dot{p}_\psi(\dot{\phi},\dot{\theta},\dot{\psi}) \end{pmatrix} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(V^{-1}) \begin{pmatrix} \dot{\phi} \\ \dot{\theta} \\ \dot{\psi} \end{pmatrix} \Big) \\ &\equiv V\boldsymbol{x} \\ &= V \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \end{aligned} \tag{36}$$

のように，列ベクトル $\boldsymbol{x}$ を定義します．すると，

$$\begin{aligned} x_1 = &(2I_z - 2I_x I_y \gamma)\sin\theta\cos\theta\ \dot{\phi}\dot{\theta} \\ &+ 2 I_x I_y \sin^2\theta \sin\psi\cos\psi\beta\ \dot{\phi}\dot{\psi} \\ &+ I_x I_y \sin\psi\cos\psi\cos\theta\beta\ \dot{\theta}^2 \\ &+ (I_x I_y \cos 2\psi\beta + I_z)\sin\theta\ \dot{\theta}\dot{\psi} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x_2 = &(I_x I_y \gamma - I_z)\sin\theta\cos\theta\ \dot{\phi}^2 \\ &+ (I_x I_y \cos 2\psi\beta - I_z)\sin\theta\ \dot{\phi}\dot{\psi} \\ &- 2 I_x I_y \sin\psi\cos\psi\beta\ \dot{\theta}\dot{\psi} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x_3 = &-I_x I_y \sin\psi\cos\psi\sin^2\theta\beta\ \dot{\phi}^2 \\ &+ (I_z - I_x I_y \cos 2\psi\beta)\sin\theta\ \dot{\phi}\dot{\theta} \\ &+ I_x I_y \sin\psi\cos\psi\beta\ \dot{\theta}^2 \end{aligned}$$

となります．そして，この列ベクトルに V をかければ良いのです．よって運動方程式は，

$$\begin{aligned} \ddot{\phi} = &\frac{\sin 2\psi\cos\theta}{2}\{I_x I_y \beta(\alpha+\gamma) - I_z\beta\}\ \dot{\phi}^2 \\ &+ \frac{\cos\theta}{\sin\theta}\{I_z\alpha - I_x I_y \alpha(\alpha+\gamma)\}\ \dot{\phi}\dot{\theta} \\ &+ \frac{\sin 2\psi}{2}\{I_x I_y \beta(\alpha+\gamma) - I_z\beta\}\ \dot{\phi}\dot{\psi} \\ &+ \frac{1}{\sin\theta}\{1 - I_x I_y (\frac{\cos^2\psi}{I_x^2} + \frac{\sin^2\psi}{I_y^2}) + I_z\alpha\}\ \dot{\theta}\dot{\psi} \end{aligned} \tag{37}$$

$$\begin{aligned}\ddot{\theta} = &\frac{\sin 2\theta}{2}\{I_x I_y(\frac{\sin^2\psi}{I_x^2} + \frac{\cos^2\psi}{I_y^2}) - I_z\gamma\}\ \dot{\phi}^2 \\ &+ \sin\psi\cos\psi\cos\theta\{I_z\beta - I_x I_y\beta(\alpha+\gamma)\}\ \dot{\phi}\dot{\theta} \\ &+ \sin\theta\{-1 + I_x I_y(\frac{\sin^2\psi}{I_x^2} + \frac{\cos^2\psi}{I_y^2}) - I_z\gamma\}\ \dot{\phi}\dot{\psi} \\ &+ \frac{\sin 2\psi}{2}\{I_z\beta - I_x I_y\beta(\alpha+\gamma)\}\ \dot{\theta}\dot{\psi}\end{aligned} \tag{38}$$

$$\begin{aligned}\ddot{\psi} = &\frac{\sin 2\psi}{2}\{I_z\beta\cos^2\theta - I_x I_y\beta(\alpha+\gamma)\cos^2\theta - \frac{2I_x I_y}{I_z}\sin^2\theta\}\ \dot{\phi}^2 \\ &+ \left[\frac{\cos^2\theta}{\sin\theta}\{I_x I_y\alpha(\alpha+\gamma) - I_z\alpha\} + \sin\theta\{\frac{I_x I_y}{I_z}(\alpha-\gamma)+1\}\right]\ \dot{\phi}\dot{\theta} \\ &+ \frac{\sin 2\psi\cos\theta}{2}\{I_z\beta - I_x I_y\beta(\alpha+\gamma)\}\ \dot{\phi}\dot{\psi} \\ &+ \frac{I_x I_y}{2I_z}\sin 2\psi\beta\ \dot{\theta}^2\end{aligned} \tag{39}$$

となります．これら三式が知りたかった剛体の運動方程式です．

それでは，今日はこの辺で．お疲れ様でした．