行列式

崎間@物理のかぎプロジェクト

2003-2-9

行列式についての定義，そしてそれを展開する方法，ベクトル積との関係について説明します．

行列式の定義

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

という行列 $\boldsymbol{A}$ があった場合，行列式はつぎのように定義されます．

$$|\boldsymbol{A}| = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$$

行列式は行列の成分同士の演算ですから，ベクトルではなく単なる値（スカラー量）です．下のように書いても，上式と同じ意味です．

$$\det \boldsymbol{A} = \det \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = ad - bc$$

また，det とは行列式を表す単語 determinant の略です．

行列式の展開

定義から 2 次の行列式ならすぐに求めることができますが，3 次以上の場合にはそうもいきません．そこで，3 次以上の行列式を 2 次以下に展開する方法があります．それは小行列式展開と呼ばれる方法です．たとえば，つぎのように展開できます．

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{21} \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{31} \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{vmatrix}$$

何をやっているのか良く分かりませんね．これは第 1 列について展開しているんですが，じっくり見ると規則性があることに気付きます．

係数について見てみます．まずは a_{11} についてです．

右辺第 1 項の係数には a_{11} が出てきてます．そしてそれに付随する小行列式は a_{11} が含まれている 1 行目と 1 列目が取り除かれた形になってます．

a_{21}, a_{31} についても同様のことがいえます．

符号について見てみます．第 1 行 1 列（左上）をプラス，そこから下または右に 1 つ進むと符号が反転すると決められています．たとえば a_{11} は左上にあるのでプラス，a_{21} は 1 つ下に行くのでマイナス，a_{31} は 2 つ下に行くのでプラスになります．

係数と符号は第 1 列以外で展開しても全く同じように成り立ちます．たとえば第 2 行で展開すれば

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = -a_{21} \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{22} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{23} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

となります．

ベクトル積と行列式

覚えにくいベクトル積も，行列式を使えば簡単に覚える事ができます．ベクトル積の定義は

$$\boldsymbol{A} \times \boldsymbol{B} = (A_y B_z - A_z B_y)\boldsymbol{i} + (A_z B_x - A_x B_z)\boldsymbol{j} + (A_x B_y - A_y B_z)\boldsymbol{k}$$

です．慣れないうちは各成分の中身がこんがらがってしまいます．でもよく見てみると行列式で書けることに気付きます．$(A_y B_z - A_z B_y)$ は行列式で書くと

$$\begin{vmatrix} A_y A_z \\ B_y B_z \end{vmatrix}$$

ですね（よく分からなければ逆に行列式を計算して確かめてみてください）．同様に他の成分も行列式で書くと

$$\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B}=\begin{vmatrix}A_y & A_z\\ B_y & B_z\end{vmatrix}\boldsymbol{i}+\begin{vmatrix}A_z & A_x\\ B_z & B_x\end{vmatrix}\boldsymbol{j}+\begin{vmatrix}A_x & A_y\\ B_x & B_y\end{vmatrix}\boldsymbol{k}$$

となります．少し覚えやすそうになりました．さらに，先ほどの小行列式展開の逆を行います（この操作の前に j の符号を変えています．理由はあとで分かります）．

$$\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B}=\begin{vmatrix}\boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k}\\ A_x & A_y & A_z\\ B_x & B_y & B_z\end{vmatrix}$$

行ごとに ijk，xyz と順番に並んでいるので，これなら覚えやすいです．ベクトル積の成分を使うときにはこれを展開して 2 次の行列式にしてやり，行列式の計算をすればいいわけです．ためしに展開してもとに戻してみます．i,j,k に着目して展開するとそれぞれの係数は

ですから

$$\begin{aligned}\begin{vmatrix}\boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k}\\ A_x & A_y & A_z\\ B_x & B_y & B_z\end{vmatrix}&=\boldsymbol{i}\begin{vmatrix}A_y & A_z\\ B_y & B_z\end{vmatrix}-\boldsymbol{j}\begin{vmatrix}A_x & A_z\\ B_x & B_z\end{vmatrix}+\boldsymbol{k}\begin{vmatrix}A_x & A_y\\ B_x & B_y\end{vmatrix}\\ &=(A_yB_z-A_zB_y)\boldsymbol{i}-(A_xB_z-A_zB_x)\boldsymbol{j}+(A_xB_y-A_yB_z)\boldsymbol{k}\\ &=(A_yB_z-A_zB_y)\boldsymbol{i}+(A_zB_x-A_xB_z)\boldsymbol{j}+(A_xB_y-A_yB_z)\boldsymbol{k}\end{aligned}$$

となり，元に戻りましたね．j の符号を変えた理由も分かると思います．

rot と行列式

ベクトル積と同様にベクトル解析の rot も行列式で覚えられます．

より

$$
\begin{aligned}
\operatorname{rot} \boldsymbol{A} &= \nabla \times \boldsymbol{A} \\
&= \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ \partial/\partial x & \partial/\partial y & \partial/\partial z \\ A_x & A_y & A_z \end{vmatrix} \\
&= \boldsymbol{i} \begin{vmatrix} \partial/\partial y & \partial/\partial z \\ A_y & A_z \end{vmatrix} - \boldsymbol{j} \begin{vmatrix} \partial/\partial x & \partial/\partial z \\ A_x & A_z \end{vmatrix} + \boldsymbol{k} \begin{vmatrix} \partial/\partial x & \partial/\partial y \\ A_x & A_y \end{vmatrix} \\
&= \left(\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z} \right) \boldsymbol{i} - \left(\frac{\partial A_z}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial z} \right) \boldsymbol{j} + \left(\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} \right) \boldsymbol{k}
\end{aligned}
$$

のように表記することができます.