

ジョルダン細胞の n 乗

クロメル@物理のかぎプロジェクト

2013-03-11

ジョルダンの標準形で有名なジョルダン細胞の n 乗を求めます。

ジョルダン細胞

ジョルダン細胞とは、次の k 次正方行列のことを言います。

$$J_k = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \lambda \end{pmatrix} \quad (1)$$

この n 乗を求めてみましょう。

注目する性質は、対角行列（単位行列の定数倍） Λ

$$\Lambda = \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \lambda \end{pmatrix} \quad (2)$$

のどんな行列とも可換な性質と、べきゼロ行列 N

$$N = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} \quad (3)$$

の持つ、何乗かするとゼロになる性質です。ためしに四次のべきゼロ行列のべき乗を求めてみましょう。

$$N = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (4)$$

$$N^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (5)$$

$$N^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (6)$$

$$N^4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (7)$$

とこの様に、べき乗すると1のなすラインが上がっていきます。

ここで求めたいのは、 J_k の n 乗、

$$(J_k)^n = (\Lambda + N)^n \quad (8)$$

です。二項定理を用います。

$$\begin{aligned} (J_k)^n &= (\Lambda + N)^n \\ &= {}_n C_0 \Lambda^n + {}_n C_1 \Lambda^{n-1} N^1 + {}_n C_2 \Lambda^{n-2} N^2 + \dots \end{aligned} \quad (9)$$

ここで N のべき数を昇順にならべました。あるところからは、 N^n はゼロ行列になります。

簡単な例

$$J_4 = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix} \quad (10)$$

$$(J_4)^2 = \begin{pmatrix} \lambda^2 & 2\lambda & 1 & 0 \\ 0 & \lambda^2 & 2\lambda & 1 \\ 0 & 0 & \lambda^2 & 2\lambda \\ 0 & 0 & 0 & \lambda^2 \end{pmatrix} \quad (11)$$

$$(J_4)^3 = \begin{pmatrix} \lambda^3 & 3\lambda^2 & 3\lambda & 1 \\ 0 & \lambda^3 & 3\lambda^2 & 3\lambda \\ 0 & 0 & \lambda^3 & 3\lambda^2 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda^3 \end{pmatrix} \quad (12)$$

$$(J_4)^4 = \begin{pmatrix} \lambda^4 & 4\lambda^3 & 6\lambda^2 & 4\lambda \\ 0 & \lambda^4 & 4\lambda^3 & 6\lambda^2 \\ 0 & 0 & \lambda^4 & 4\lambda^3 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda^4 \end{pmatrix} \quad (13)$$

とこの様に簡単にべき乗が求まります。

行列の指数関数

行列の指数関数がジョルダン細胞の場合にも、求まったので書いておきます。

$$\begin{aligned} \exp(tJ_k) &\equiv \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(J_k)^n}{n!} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \frac{n!}{(n-i)!i!} t^n \Lambda^{n-i} N^i \\ &= N^i \frac{t^i}{i!} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^{n-i} \Lambda^{n-i}}{(n-i)!} \\ &= N^i \frac{t^i}{i!} \exp(t\Lambda) \end{aligned} \quad (14)$$

よって、例えば、四次なら、

$$\exp(tJ_4) = \begin{pmatrix} \exp(t\Lambda) & \frac{t}{1!} \exp(t\Lambda) & \frac{t^2}{2!} \exp(t\Lambda) & \frac{t^3}{3!} \exp(t\Lambda) \\ 0 & \exp(t\Lambda) & \frac{t}{1!} \exp(t\Lambda) & \frac{t^2}{2!} \exp(t\Lambda) \\ 0 & 0 & \exp(t\Lambda) & \frac{t}{1!} \exp(t\Lambda) \\ 0 & 0 & 0 & \exp(t\Lambda) \end{pmatrix} \quad (15)$$

となります。以上でこの話は終わりです。[続々ベクトルの回転](#) と比べると面白いかもしれません。今日はここまで、お疲れ様でした。