相関関数と畳み込み積分のフーリエ変換

クロメル@物理のかぎプロジェクト

2011-06-07

今回は物理とは距離を置いて，物理を勉強する上で僕がつきあたった数学的問題の一つを，厳密さに欠けますが，書こうと思います．厳密には，積分の順序を交換する時，それぞれの積分が絶対収束することを言わねばなりません．

相関関数

実数の物理量 $\phi_1(t_0)$ と，$\phi_2(t_0)$ の相互相関関数 $C_{12}(t)$ とは，

$$C_{12}(t) \equiv \int_{-\infty}^{\infty} \phi_1(t+t_0)\phi_2(t_0)dt_0$$

と定義されます．注意しておくこととして，相互相関関数は，自己相関関数（ $\phi_1(t) = \phi_2(t)$ の時）と違い，偶関数にはなりません．

相関関数のフーリエ変換

これをフーリエ変換するとどうなるか，と言うのが，今回の問題です．やってみますと，

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}(C_{12}(t)) &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega t} \int_{-\infty}^{\infty} \phi_1(t+t_0)\phi_2(t_0)dt_0dt \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega t} \int_{-\infty}^{\infty} \phi_1(t+t_0)\phi_2(t_0)dt_0dt \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega(t+t_0)} \phi_1(t+t_0)d(t+t_0) \int_{-\infty}^{\infty} \phi_2(t_0)e^{i\omega t_0}dt_0 \\
&= \mathcal{F}\phi_1(\omega) \int_{-\infty}^{\infty} \phi_2(t_0)e^{i\omega t_0}dt_0 \\
&= \mathcal{F}\phi_1(\omega)\mathcal{F}\phi_2(-\omega)
\end{aligned}$$

となります．ここで，ϕ_1 と ϕ_2 を入れ替えれば，$\mathcal{F}(C_{21}(t)) = \mathcal{F}\phi_1(-\omega)\mathcal{F}\phi_2(\omega) = \mathcal{F}(C_{12}(-t))$ が成立します．

余談ですが，もしかすると，ヤコビアンに関する知識が必要かもしれません．つまりは，$s = t + t_0$ と置くと，$t_0 = t_0$，$t = s - t_0$ より，

$$
\begin{aligned}
dt_0 dt &= \begin{vmatrix} \dfrac{\partial t_0}{\partial t_0} & \dfrac{\partial t_0}{\partial s} \\ \dfrac{\partial t}{\partial t_0} & \dfrac{\partial t}{\partial s} \end{vmatrix} dt_0 d(t+t_0) \\
&= \begin{vmatrix} \dfrac{\partial t_0}{\partial t_0} & \dfrac{\partial t_0}{\partial s} \\ \dfrac{\partial (s-t_0)}{\partial t_0} & \dfrac{\partial (s-t_0)}{\partial s} \end{vmatrix} dt_0 d(t+t_0) \\
&= \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} dt_0 d(t+t_0) \\
&= dt_0 d(t+t_0)
\end{aligned}
$$

です．

畳み込み積分とフーリエ変換

畳み込み積分というものを定義します．

$$
h(t) \equiv \int_{-\infty}^{\infty} \phi_1(\tau)\phi_2(t-\tau)d\tau
$$

これもフーリエ変換してみましょう．

$$
\begin{aligned}
\mathcal{F}(h(t)) &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega t} \int_{-\infty}^{\infty} \phi_1(\tau)\phi_2(t-\tau)d\tau dt \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega(t-\tau)}\phi_2(t-\tau)dt \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega\tau}\phi_1(\tau)d\tau \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega(t-\tau)}\phi_2(t-\tau)d(t-\tau) \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega\tau}\phi_1(\tau)d\tau \\
&= \mathcal{F}\phi_2(\omega) \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega\tau}\phi_1(\tau)d\tau \\
&= \mathcal{F}\phi_2(\omega)\mathcal{F}\phi_1(\omega)
\end{aligned}
$$

こうなりました．何かの参考になれば幸いです．

それでは，今日はこの辺で．