対数関数 ln と指数関数 exp が逆関数であることの証明

クロメル@物理のかぎプロジェクト

2010-05-17

この記事では,,

$$y = f(x) = \ln\ x = \log_e\ x$$

が[*1],

$$y = g(x) = e^x = \exp(x)$$

の逆関数であることを確認します.

本題

$$\begin{aligned} y &= (f \circ g)(x) \\ &= \ln\ e^x \\ &= x \ln\ e \\ &= x \end{aligned}$$

は,簡単に示せます[*2].

ではははたして,

$$\begin{aligned} y &= (g \circ f)(x) \\ &= e^{\ln\ x} \\ &= x \end{aligned} \tag{1}$$

は,どうしたら示せるでしょうか?[*3]

それには,ちょっと工夫が要ります.式 (1) において,

$$x = \exp(t)$$

[*1] 大学では,e を底とする対数関数 $\log_e\ x$ を,$\ln\ x$ と書きます.

[*2] ここで,$\ln\ x^y = y \ln\ x$ という性質を用いました.

[*3] そもそも,$y = \ln\ x$ は,e を y 乗した時 x になるときの y という数の事だったので,定義から考えると当然の結果ではあります.よって,以下は計算で示したい人だけ読んでください.

と置いてやるのです．

$$
\begin{aligned}
y &= (g \circ f)(x) \\
&= \exp(\ln\ x) \\
&= \exp(\ln\ e^t) \\
&= \exp(t \ln\ e) \\
&= \exp(t) \\
&= x
\end{aligned} \tag{2}
$$

一番最後の行で，最初に決めた関係 $e^t = x$ を用いました．

これで，めでたく

$$
(f \circ g)(x) = (g \circ f)(x) = x
$$

が示せました．では，そろそろ，今日はここまで．