新たな積分の形式

クロメル@物理のかぎプロジェクト

2010-04-21

小ネタです．あらたな積分の形式を考えてみました．でも残念なことに，応用には向かなさそうです．

復習（高校でならう積分）

高校でならう積分の復習をしてみます．リーマン積分ってやつですね．ちょっとおおざっぱですが，お許しください．

関数 f(x) の a から b までの定積分を定義するには，まず区間 $[a,b]$ を n 等分してできる，n+1 個の分割点に $x_i \quad (i=0,1,\cdots,n)$ と名前をつけます．[*1] そして，その間隔を $\Delta x = x_{i+1} - x_i = \frac{b-a}{n}$ とします．

そこで，定積分を以下のように定義するのでした．

$$\begin{aligned}\int_0^x f(x)dx &\equiv \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x \\ &= (b-a)\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} f(x_i)\frac{1}{n}\end{aligned}$$

ここで，$b-a$ を前に出したのは，今後の布石です．最後の行をよく見てみると，(b-a）×（ｎ個の点での f(x) の値の平均）になっていますよね．つまり，すべての点の平均値に区間の長さをかければ，曲線の下の面積になるわけです．

新たな積分

ここで，今回のメインコンテンツは，さっき出てきた平均を，相加平均じゃなくて相乗平均にしてしまおうというのが，基本のアイディアです．では，さっそく変えてみましょう．

簡単のため，区間 $[a,b]$ ではなく，区間 $[0,1]$ にしておきます．汎関数の一種なので，$\pi(f)|_0^1$ とでも，表

---

*1 具体的な書くと $x_i = a + \frac{(b-a)i}{n}$ です．

現しましょうか.

$$\begin{aligned}\pi(f)|_0^1 &\equiv \lim_{n\to\infty}\left(\prod_{i=1}^n f(x_i)\right)^{1/n} \\ &= \lim_{n\to\infty} e^{\log\left(\prod_{i=1}^n f(x_i)\right)^{1/n}} \\ &= \lim_{n\to\infty} e^{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n \log f(x_i)} \\ &= \lim_{n\to\infty} e^{\Delta x\sum_{i=1}^n \log f(x_i)} \\ &= e^{\int_0^1 \log f(x)dx}\end{aligned}$$

なんだ，結局既存の計算手法で表現できるものでしたね．拡張するには，出てきた定積分の区間を $[a,b]$ とするのが，自然だと思います．以下に，一般の形を書きます.

新たな積分のまとめ

関数 $f(x)$ の区間 $[a,b]$ での新たな定積分は,

$$\pi(f)|_a^b \equiv e^{\int_a^b \log f(x)dx}$$

となります.

$f(x)$ がゼロになる区間を含んでいると，すべて 1 になってしまうので，いまいち使い勝手が悪いなぁというのが正直な感想です.

新たな積分の応用

元にあるのは，相乗平均ですから，連続変数であって，大域的には指数関数的変動をする変数の単位時間当たりの変動倍率をもとめる時なんかに使えるかなぁ？

それは,

$$\frac{\pi(f)|_a^b}{e^{b-a}} = e^{\frac{\int_a^b \log f(x)dx}{\int_a^b dx}}$$

で求められます.

積分の他の拡張

平均を調和平均にした場合，詳しくは書きませんが同様に，

$$\begin{aligned}\eta(f)_0^1 &\equiv \lim_{n\to\infty} n \times \left(\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{f(x_i)}\right)^{-1} \\ &= \lim_{n\to\infty} \left(\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{f(x_i)n}\right)^{-1} \\ &= \lim_{n\to\infty} \left(\sum_{i=1}^{n} \frac{\Delta x}{f(x_i)}\right)^{-1} \\ &= \left(\int_0^1 \frac{1}{f(x)} dx\right)^{-1}\end{aligned}$$

同様に区間を一般化して，

$$\eta(f)_a^b \equiv \left(\int_a^b \frac{1}{f(x)} dx\right)^{-1}$$

となります.

これは，例えば無限に細い単位長さあたりの抵抗の異なる抵抗を束ねた時，全体の抵抗はどうなるか計算できます.

最後に幾何平均と調和平均が定義できるためには，区間 [a,b] に於いて，f(x)>0 が必要であることを付け加えておきます.

それでは，今日はこの辺で．ごきげんよう (^o^)/~