ハミルトニアンとラグランジアンの全微分形

クロメル@物理のかぎプロジェクト

2013-03-02

この記事では，ハミルトニアンとラグランジアンの全微分形を確認します．その後で，特に一粒子の調和振動子に対する表式を確認します．

ハミルトニアンの全微分形

時間に依存しないハミルトニアンに対して，正準方程式は，時間微分をドットで表すと，

$$\dot{q} = \frac{\partial H}{\partial p} \tag{1}$$

$$\dot{p} = -\frac{\partial H}{\partial q} \tag{2}$$

ですね．よって，ハミルトニアンの全微分は，

$$\begin{aligned} dH &= \frac{\partial H}{\partial q} dq + \frac{\partial H}{\partial p} dp \\ &= -\dot{p} dq + \dot{q} dp \end{aligned} \tag{3}$$

となります．

ラグランジアンの全微分形

式 (3) にルジャンドル変換を行います．

$$L = p\dot{q} - H \tag{4}$$

ですから，

$$\begin{aligned} dL &= d(p\dot{q} - H) \\ &= pd\dot{q} + \dot{q}dp + \dot{p}dq - \dot{q}dp \\ &= pd\dot{q} + \dot{p}dq \end{aligned} \tag{5}$$

となります.

調和振動子の場合

調和振動子の運動方程式は,

$$m\ddot{q} = -kq \tag{6}$$

です．この関係を用いて，まずは dH を p, q で表します．$p = m\dot{q}$ より,

$$\begin{aligned} dH &= -\dot{p}dq + \dot{q}dp \\ &= -\frac{d}{dt}(m\dot{q})dq + \frac{p}{m}dp \\ &= -m\ddot{q}dq + \frac{p}{m}dp \\ &= kq\ dq + \frac{p}{m}dp \end{aligned} \tag{7}$$

とこの様になります．そして，ラグランジアンの方は，$q, \dot{q}$ で表しますから,

$$\begin{aligned} dL &= pd\dot{q} + \dot{p}dq \\ &= m\dot{q}\ d\dot{q} + m\ddot{q}dq \\ &= m\dot{q}\ d\dot{q} - kq\ dq \end{aligned} \tag{8}$$

となります．そして，これらの量は状態量であるので,

$$\begin{aligned} &\frac{\partial}{\partial p}\frac{\partial H}{\partial q} - \frac{\partial}{\partial q}\frac{\partial H}{\partial p} \\ =&\frac{\partial}{\partial p}kq - \frac{\partial}{\partial q}\frac{p}{m} \\ =&0 - 0 = 0 \end{aligned} \tag{9}$$

や,

$$\frac{\partial}{\partial q}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} - \frac{\partial}{\partial \dot{q}}\frac{\partial L}{\partial q} = 0 \tag{10}$$

が成立し，適当な積分路で積分してやれば，積分路の端点 $(0, 0) \to (p, q)\mathrm{or}(\dot{q}, q)$ が同じである限り，どんな積分路であろうとも,

$$H = \frac{p^2}{2m} + \frac{k}{2}q^2 \tag{11}$$

$$L = \frac{m}{2}\dot{q}^2 - \frac{k}{2}q^2 \tag{12}$$

となります．それでは今日はこの辺で.