

ベクトル解析奮闘記 (1)

やかん@物理のかぎプロジェクト

YYYY-MM-DD

はじめに

講義などで初めてベクトル解析を習った時，“難しい”，“わけわからん”と思った経験がありませんか？実は私もその一人です．いまだに詳しくはわかりませんが，これまで私が悩んだ過程をここにご紹介して，もしご参考になればと思います．

初講義前日

ベクトル解析って，ベクトルを使って問題解いたりするのでしょうか？ベクトルなら高校の数学で習ったし，要するに大きさと，方向（向き）を持つ概念ですよ？矢印作図して足し算したり，引き算したり，大きさを実数倍したり，特に始点を原点.. raw:: latex

```
begin{align*} (0,0) end{align*}
```

Block quote ends without a blank line; unexpected unindent.

にすれば終点の座標 (x, y) でベクトルを表せちゃいます．作図しなくても，そういう風に成分表示すれば足し算，引き算も簡単です．内積だってわかります．成分で書くと $(a, b) \cdot (c, d) = ac + bd$ とすればいいのです．簡単，なはずです．たいした事ないですよ，きっと．実は明日ベクトル解析の初講義なんですが，予習なんてしないで寝ちゃおっと・・・

翌日初講義終了．ところが！

わー，なんなんだこれは！わからん，全くわからん！だいたい三角関数の \sin, \cos じゃあるまいし，なんでベクトルやるのに 3, 4 文字英単語（grad（グラジエント），div（ダイバージェンス），rot（ローテーション））や，おまけに偏微分記号まで出てくるんでしょう！もちろん \sin, \cos は私でもわかります，直角三角形の辺の比ですよ？（絵を書いてみればすぐわかります．）偏微

分だって、他の変数（例えば x で微分する場合、それ以外の y, z など）を定数と見て、微分する事でしょ？それも知ってるんだがなあ。いずれにせよこれは家に帰ってよく復習しないと。電磁気学はこれ使うって言うし・・・

自宅で復習 (grad の巻)

ここであきらめたり、あせってもしょうがないのでまずゆっくり順番に考えてみました。“grad” はえーっと “gradient (傾き)” の略ですか・・・たしか先生が黒板に書いた式は

$$\text{grad}f = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z} \right)$$

だったなー。う～ん、grad ももちろん、 ∂ がいかにも難しそう・・・でも冷静に見ると、これは値が三つ組みになっているから、スカラー（ベクトルのように方向を持たないただの数値）関数 f から 3 次元のベクトルを一つ作ったようですね（どんなベクトルかはまだわかりませんが）。とりあえず、わかりやすくするために z を省いて 2 次元で考えると

$$\text{grad}f = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y} \right)$$

あれっ、こうやってみると、 x の変化に対する f の変化率と、 y の変化に対する f の変化率を x, y 成分に持つベクトルのようですね。例えば f を具体的に考えると

$$f = 3x + 4y$$

Explicit markup ends without a blank line; unexpected unindent.

なら

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 3$$

Explicit markup ends without a blank line; unexpected unindent.

($4y$ は定数扱いで 0 になる) .. raw:: latex

$$\text{begin}\{\text{align}^*\} \quad \text{frac}\{\text{partial} f\}\{\text{partial} y\}=4 \text{end}\{\text{align}^*\}$$

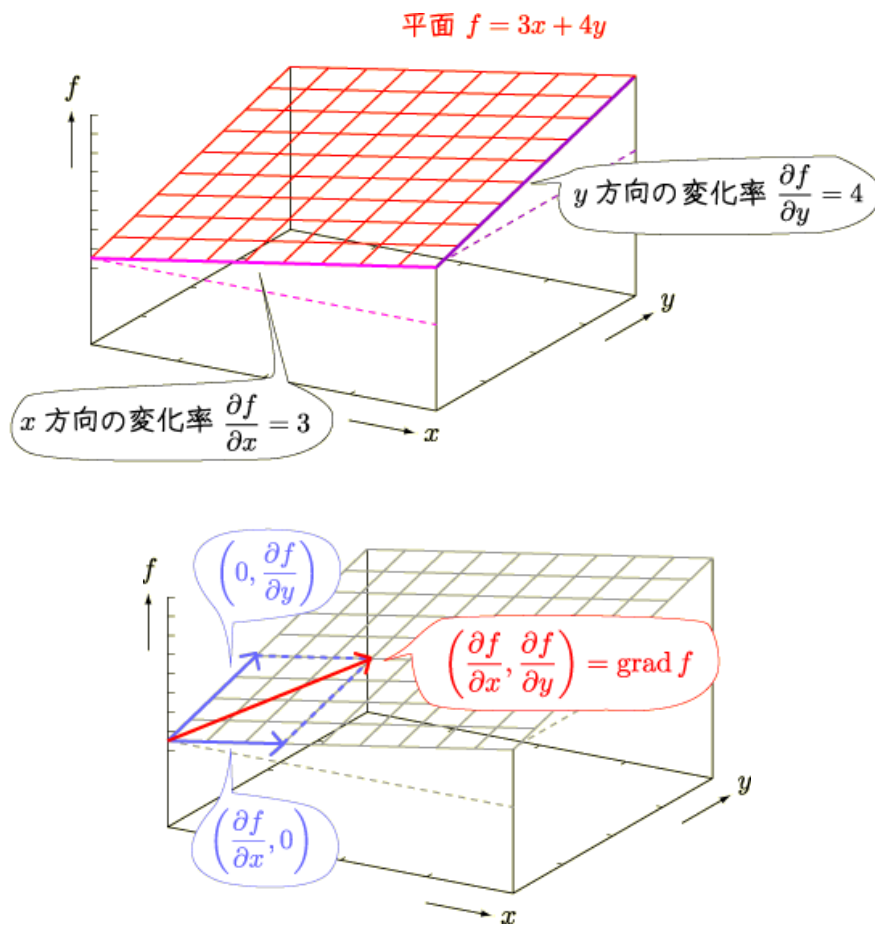
Block quote ends without a blank line; unexpected unindent.

($3x$ は定数扱いで 0 になる) だから

$$\text{grad}f = (3, 4)$$

Explicit markup ends without a blank line; unexpected unindent.

となるわけですか・・・一体このベクトルは何者でしょうか？今の場合、変数 (x, y) の変化に対する f の変化率を表記する時に、 x 方向に対する変化率は 3、 y 方向に対する変化率は 4、ということなのですが、どちらか 0 なら、片方だけ（数値 1 個）で表されるのでしょけれど、実際はそうとは限らないし、 x 方向と y 方向じゃ違う方向の大きさですから、 $3 + 4 = 7$ と足し算するわけにもいきません。もし $(1, 100)$ なら、ほとんど y 方向と考えていいけど、 x 方向も完全に無視はできないし、それぞれの方向の大きさに応じた合成方向・・・というわけですか。この数値の場合と、一般的な場合をグラフに書くと以下のようになりますね。



なるほど、それで x 方向と y 方向の変化率をそれぞれ x 方向と y 方向の成分としたベクトル..
 raw:: latex

```
begin{align*} \{\rm grad\} f = (\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y})
```

```
end{align*}
```

を考えれば、まとめて表記できるわけですね。 x 方向の変化率を.. raw:: latex

```
begin{align*} (\frac{\partial f}{\partial x}, 0) end{align*}
```

Block quote ends without a blank line; unexpected unindent.

, y 方向の変化率を.. raw:: latex

```
begin{align*} (0, \frac{\partial f}{\partial y}) end{align*}
```

Block quote ends without a blank line; unexpected unindent.

と、それぞれ自体ベクトルと考えると、

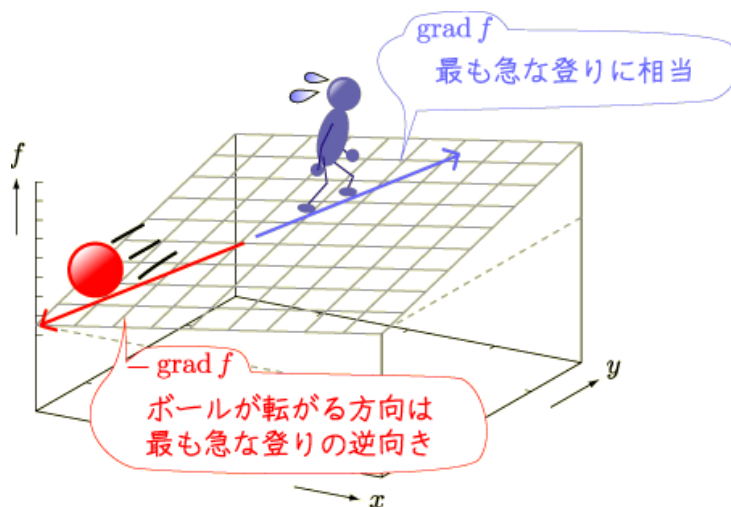
$$\left(\frac{\partial f}{\partial x}, 0\right) + \left(0, \frac{\partial f}{\partial y}\right) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}\right) = \text{grad} f$$

Explicit markup ends without a blank line; unexpected unindent.

ですから、 $\text{grad} f$ は x の変化率と y の変化率を方向も含めて合成した、一番変化率の高い(坂
 と言えば勾配のきつい)方向を向いてるベクトルなんですね。だから grad (勾配)という

のか・・・ふー，やっとわかった気がします。(z を増やして3次元で考えても同じ事ですね)

勾配がきつい方向ということは，矢印を逆にすれば，ボールが転がり落ちてくる方向になります(下図)。



@@information:イラスト:崎間@@