ベクトル解析奮闘記 3

やかん@物理のかぎプロジェクト

2005-10-27

大学に入ると"ベクトル解析"を習うのですが，高校でやる"ベクトル"よりもちょっと手ごわそうです．黒板に先生が書いた式も，難しそうだし・・・．もしよろしかったら私と一緒にベクトル解析の基本，やってみませんか．

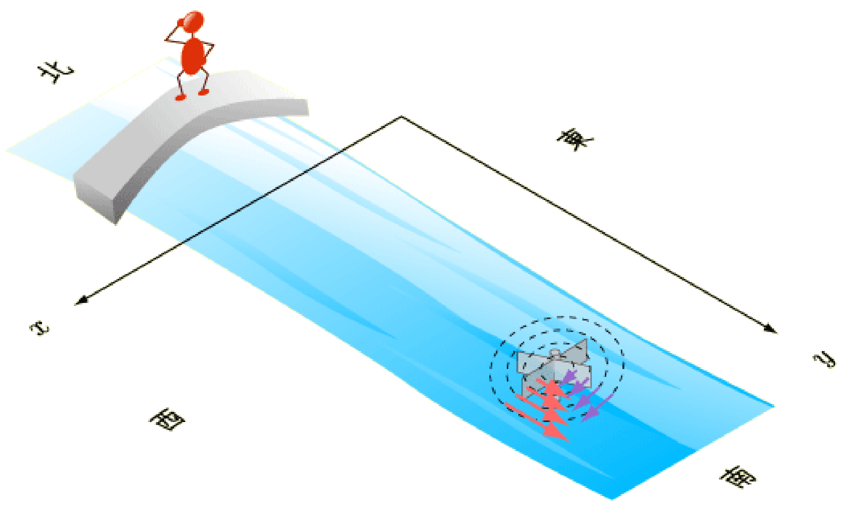
（続き物なので ベクトル解析奮闘記 1 からお読みいただくと嬉しいです！）

自宅で復習（rot の巻）

いよいよ最後，rot．読みは"ローテーション"($rotation$ = 回転)．先生が黒板に書いた式は・・・，う〜ん，これは ∂ ばっかりで，grad よりも div よりも，一層難しそうな顔をしている・・・．眺めていてもわからないので，先生が言われた"渦（うず）の事ですよ！"をヒントに，考えてみる事にしました．

小川の流れをヒントに

北から南に流れている小川があったとして，私が橋の上から南（下流）を見ていたとしましょう（下図参照）．



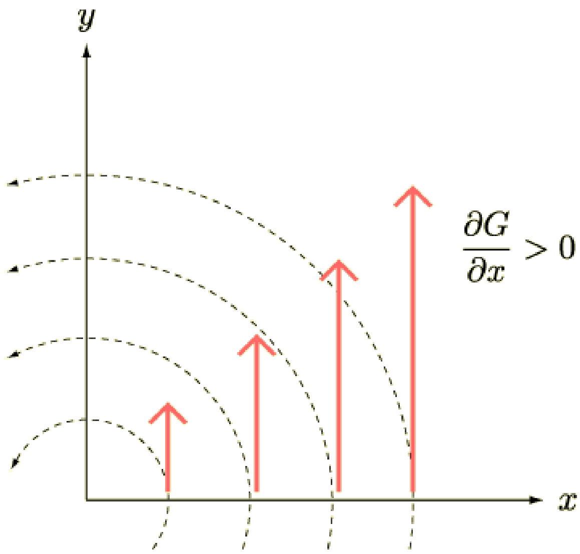
普通のイメージでは，さらさらと渦など作らずに，東の岸付近の水も，西の岸付近の水も，平行に流れて行きますよね（もうすでに頭の中で渦が巻いている方もいらっしゃるでしょうか・・・）．さて平行なはずの水流が，一体どうなれば渦を巻くのでしょう？まず東から西の方向・向きを x 軸，北から南（水流と平行）に行く方向・向きを y 軸とします．もし東から西に行くほど（ x 軸を正に行けば行くほど） 小川の流れが速いとすると，なんだか反時計回りに回り込んで，渦を巻きそうです．これは x の増加に対応する y 方向速度成分（ y 方向の矢印の長さ．速度を長さで表しているだけで，長さの分，南に動くとは限らないし，もちろん y の値ではない.）の変化率が正という事です．水流の速度を表すベクトル関数を

$$\vec{A} = (F, G)$$

とすると，y 方向成分は，スカラー関数 G で表されるから，

$$\frac{\partial G}{\partial x}$$

が正で，なおかつこの値が大きければ大きいほど渦は強そうですね（下図参照）．

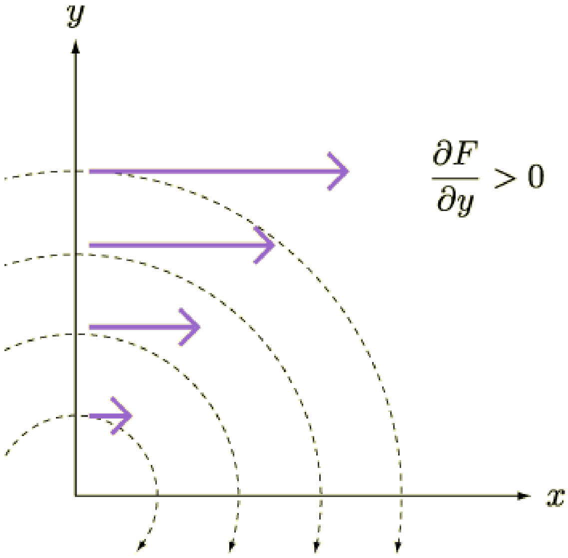


でもそれだけでいいんでしょうか？

まてよ，もしかしたら，下流の方が上流より，東から西方向（小川の流れに直交する方向）への速度があるかもしれません．もしそうなら，さっきとは丁度逆に，時計回りの渦を作りそうです．これは，”下流に行く（ y が増加する） ”ほど，”東西方向の流れが速くなる（ F が増加する）”わけですから，同様に数式で表すと

$$\frac{\partial F}{\partial y}$$

となります（下図参照）．



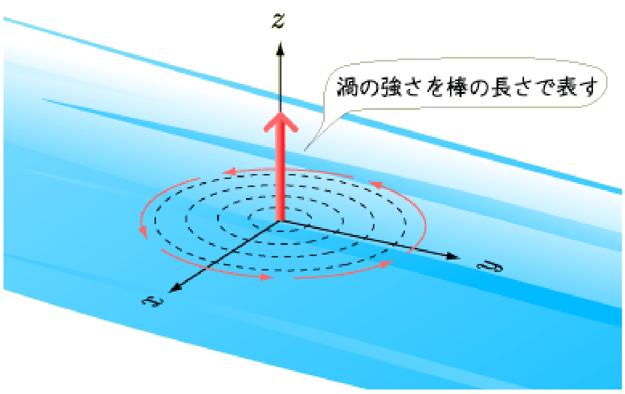
従って，反時計回り方向の渦は，それを差し引いた分，

$$\frac{\partial G}{\partial x} - \frac{\partial F}{\partial y}$$

が正で，値が大きければ大きいほど，強くおこりそうです．

渦の方向・向き

ところでこの渦，どの方向に向いていると表現したらいいのでしょうか？ x 軸方向？それとも y 軸方向でしょうか？でも，見る間にぐるぐる回っているので，いずれの方向で表すのも難しそうです．むしろ渦の真中に，水面と垂直に棒を立てて目印とし，”棒を軸とした周りの渦である”とした方がわかりやすそうですね．渦の強さは棒の長さで表せば，遠目に見ても一目瞭然です（下図参照）．



x , y と来たので，棒の方向は z 軸になります．つまり z 軸方向の渦（これ以降，回転）はさきほどの式

$$\frac{\partial G}{\partial x} - \frac{\partial F}{\partial y}$$

と考えられます．ここで小川のイメージから離れますが，ベクトル関数を２次元（平面）から３次元（空間）に拡張して $\vec{A}=(F,G,H)$ と置き，x 軸方向の回転についても，順に変数を入れ替えて，

$$\frac{\partial H}{\partial y}-\frac{\partial G}{\partial z}$$

y 軸方向の回転についても，順に変数を入れ替えて，

$$\frac{\partial F}{\partial z}-\frac{\partial H}{\partial x}$$

とできます．これらはそれぞれ方向の違う量なので，単純に足し算はできず，それぞれ回転の x 方向成分，y 方向成分，z 方向成分として下記のように列記するしかありません．

$$\left(\frac{\partial H}{\partial y}-\frac{\partial G}{\partial z},\frac{\partial F}{\partial z}-\frac{\partial H}{\partial x},\frac{\partial G}{\partial x}-\frac{\partial F}{\partial y}\right)$$

これはスカラー関数の三つ組みとも言えますが，それぞれを x,y,z 成分に持つ，３次元ベクトルとも考えられますね．このベクトルの事を $\vec{A}$ の回転（またはローテーション），記号では，$\mathrm{rot}\vec{A}$ と呼ぶようです．つまり回転軸は，より回転の強い軸方向に近く向いているわけです．なお普通は，$\vec{A}=(A_x,A_y,A_z)$ という風に表記するので

$$\mathrm{rot}\vec{A}=\left(\frac{\partial A_z}{\partial y}-\frac{\partial A_y}{\partial z},\frac{\partial A_x}{\partial z}-\frac{\partial A_z}{\partial x},\frac{\partial A_y}{\partial x}-\frac{\partial A_x}{\partial y}\right)$$

という形になります（目が回りそう・・・）．

一体，何の役に？

さて，この ”回転 ”，何に使うのでしょうか？ベクトル解析全体が，電磁気学っぽいですが，棒の周りの ”回転 ” というと，例えば，電線に電流を流した際に，周りにできる磁界ベクトルなどを表すのに使えるそうです．磁界ベクトルを $\vec{H}$，　電流密度ベクトルを $\vec{i}$ とすると，

$$\mathrm{rot}\vec{H}=\vec{i}$$

となる・・・，そうですよ．

みなさん，これからもベクトル解析，電磁気学頑張って下さいね．応援してます！ (^-^) （私も頑張ります (>_<)）

（続き物なので ベクトル解析奮闘記 1 , ベクトル解析奮闘記 2 もお読みいただくと嬉しいです！）