三角関数の微分 1

崎間@物理のかぎプロジェクト

2004-07-14

三角関数を続けて微分して行くと，sin や cos の繰り返しになりますよね．たとえば，$\sin(x)$ の微分は

$$\frac{d}{dx}\sin(x) = \cos(x)$$

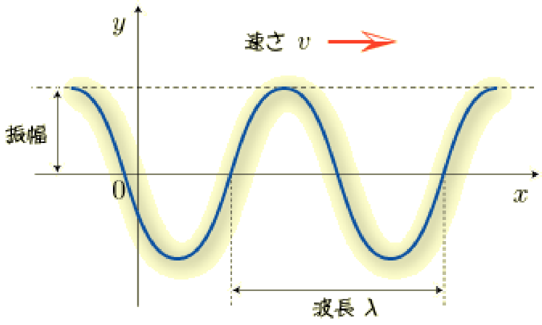
ですし，$\cos(x)$ の微分は

$$\frac{d}{dx}\cos(x) = -\sin(x)$$

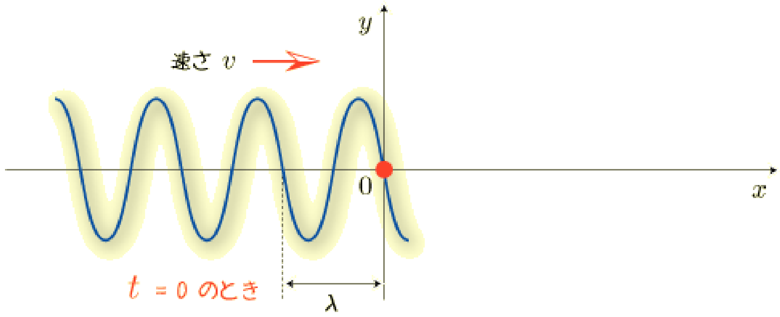
です．2 階微分，3 階微分となると，これがどんどん繰り返されていくわけです．使っているうちに公式として覚えてしまいますが，そもそも三角関数の微分とは何を意味しているのでしょうか．ここでは，できるだけ視覚的なイメージから，三角関数の微分の意味をとらえて行きたいと思います．

sin(x) の接線の傾き

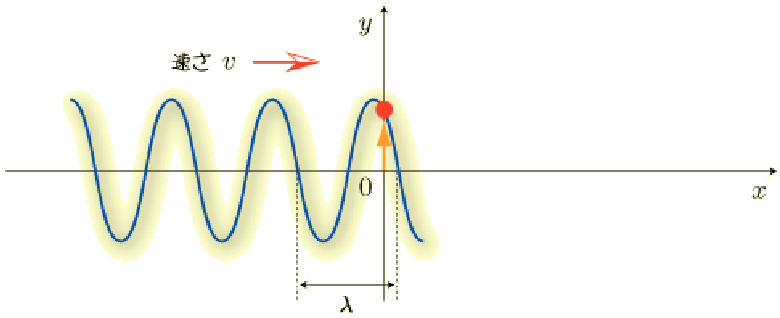
$f(x) = \sin(x)$ のグラフはつぎのようなものです．



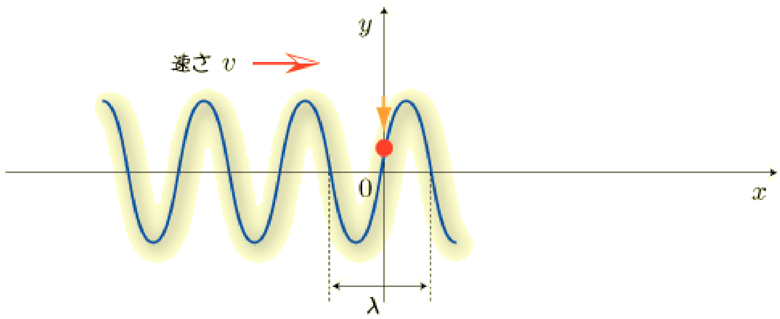
縦軸に $\sin(x)$，横軸に x をとっています．微分とはそもそも，接線の傾き（の関数）を求める操作です．このグラフに，接線の傾きを書き込みますと



というふうになります．この接線の傾きに注目しましょう．$\sin(x)$ のグラフ自体が x 軸と交わる部分，すなわち $x = 0, \pi, 2\pi$ で，接線の傾きが最大もしくは最小になることが分かります．傾きが最大，というのは最も急に右上に傾いている部分，ということです．

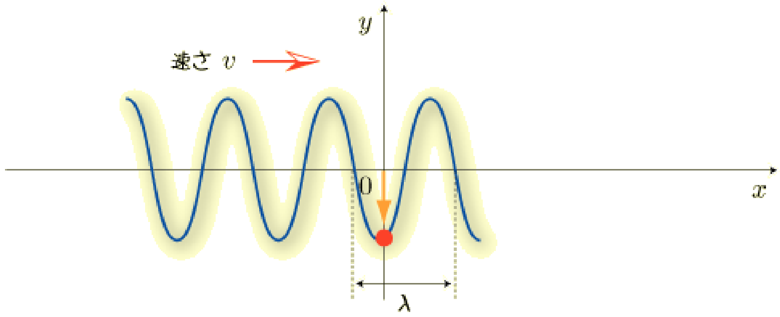


また，接線の傾きがゼロになるのは $x = \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}$ の点です．

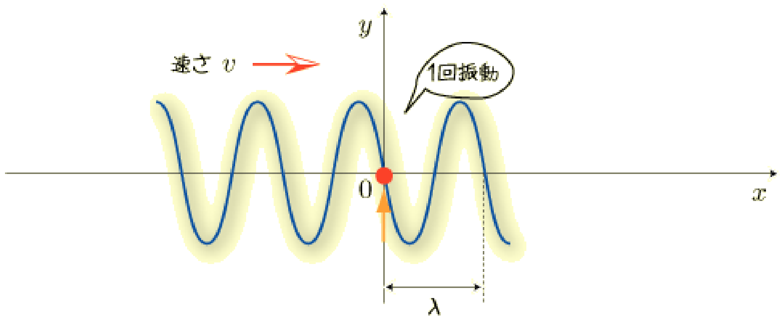


sin(x) の微分のグラフ

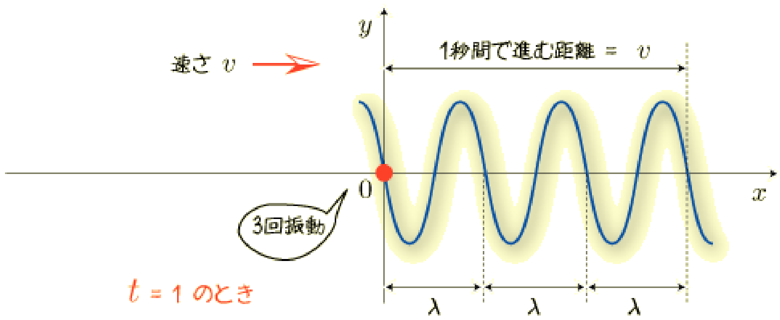
微分のグラフとは，この接線の傾きのグラフです．縦軸のスケールは気にしないでおいて，接線の傾きの情報をグラフにてみます．横軸は先ほどと同じ，縦軸には $\frac{df(x)}{dx}$，つまり接線の傾きをとります．傾きの最大，最小，ゼロの情報から，つぎのように点を打てます．



さらに，それぞれの点の間の中途半端な部分も点で埋めます．最初に $\sin(x)$ のグラフの接線の傾きを描いてみましたから，なんとなくつぎのようになることが分かると思います．



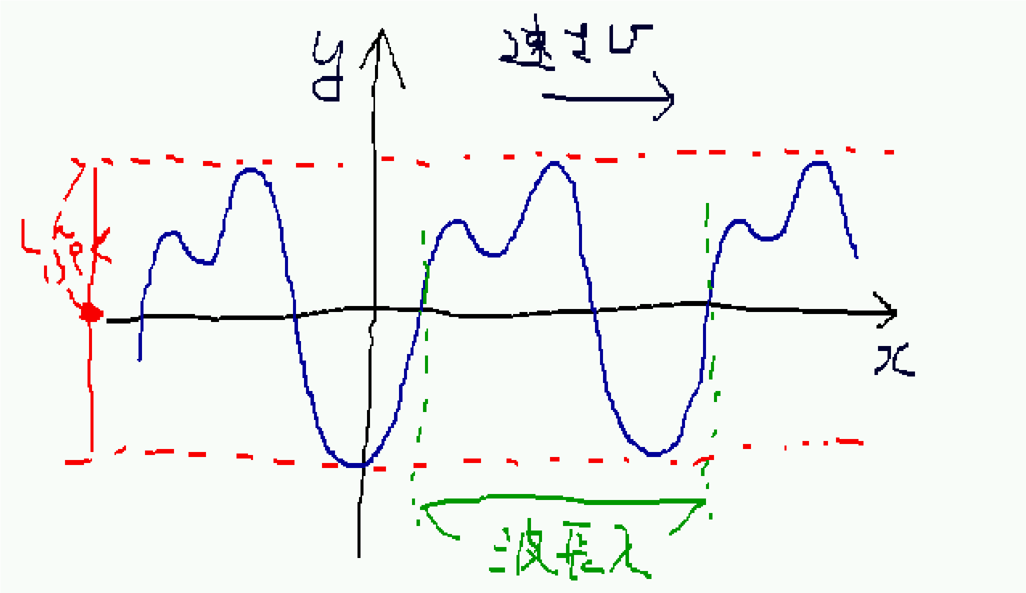
さらに点をたくさん打ちまして，滑らかにつなぐと



というものになります．これは見たことありますね．$\cos(x)$ のグラフです．これで，$\sin(x)$ の微分が $\cos(x)$ になるということが，グラフの直感的イメージから導かれたことになります．

cos(x) の微分のグラフ

$f(x) = \cos(x)$ のグラフに対して，同様のことを行ってみます．すると最終的にはつぎのグラフが得られます．



これは $\sin(x)$ のグラフと比べて上下が正反対ですから，$-\sin(x)$ のグラフである，と言うことができます．したがって，$\cos(x)$ の微分は $-\sin(x)$ であるということも分かりました．

「微分とは接線の傾きである」というイメージさえつかんでいれば，このように三角関数の微分も，図形から直感的に理解することが可能です．