角運動量

クロメル@物理のかぎプロジェクト

2007-03-23

剛体の回転シリーズ第２弾です．前の記事は ベクトルのモーメントとトルク角運動量 です．

角運動量の従う式

ニュートンの力学第二法則は,

$$\boldsymbol{F} = m\frac{d^2\boldsymbol{r}}{dt^2} = \frac{d\boldsymbol{p}}{dt} \tag{1}$$

でした．

適当に座標を決めて，この式の両辺のモーメントをとってみますと,

$$\boldsymbol{r} \times \boldsymbol{F} = \boldsymbol{r} \times \frac{d\boldsymbol{p}}{dt}$$

この式の左辺は力のモーメント（トルク）であり,

$$\boldsymbol{N} = \boldsymbol{r} \times \boldsymbol{F} \tag{2}$$

右辺は，次に示す通り角運動量の時間微分です．

$$\begin{aligned} \boldsymbol{r} \times \frac{d\boldsymbol{p}}{dt} &= \frac{d}{dt}(\boldsymbol{r} \times \boldsymbol{p}) - \frac{d\boldsymbol{r}}{dt} \times \boldsymbol{p} \\ &= \frac{d}{dt}(\boldsymbol{r} \times \boldsymbol{p}) - m\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{v} \\ &= \frac{d}{dt}(\boldsymbol{r} \times \boldsymbol{p}) \end{aligned}$$

よって，角運動量とトルクの関係

$$\boldsymbol{N} = \frac{d\boldsymbol{L}}{dt} \tag{3}$$

が導かれるわけです．

角運動量保存の法則

いま導いた式のトルクがゼロの時，角運動量は保存量になります．式 (2) を見れば，これは $\boldsymbol{F}=0$ の時か，加わる力が $\boldsymbol{r}$ に平行なときです．特に後者の時，働く力のことを中心力といいます．

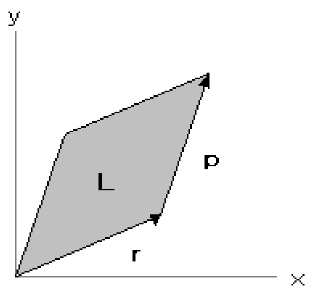
今，$\boldsymbol{r}$ と $\boldsymbol{p}$ が xy 平面内にあるとき，この中心力が働いていたとします．この時角運動量は z 軸方向にあり，z 軸方向単位ベクトルを $\hat{\boldsymbol{z}}$ とすると，極座標を用いて，

$$\boldsymbol{L}=mrv_{\theta}\hat{\boldsymbol{z}}=mr^2\dot{\theta}\hat{\boldsymbol{z}}$$

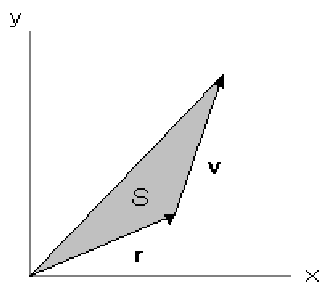
v_θ は，速度 $\boldsymbol{v}$ の θ 方向成分です．角運動量ベクトルは中心力なので保存しますから，最初の値から変わらず運動中一定です．

面積速度一定の法則

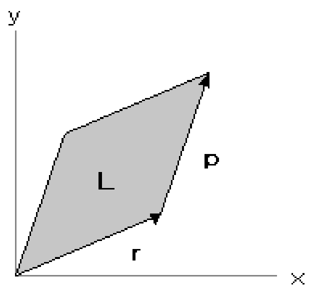
ここで $\boldsymbol{L}$ という量が面積速度という概念と結びつくことを見てみます．



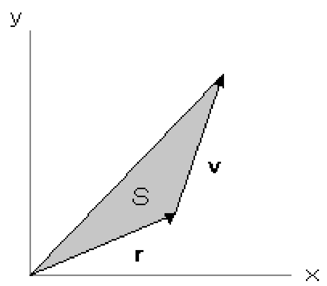
角運動量



面積速度



角運動量



面積速度

面積速度とは原点 O と質点を結ぶ線分が単位時間当たりに掃く面積のことで，$\boldsymbol{r}$ と $\boldsymbol{v}$ のなす角度を ϕ とすれば，

$$\boldsymbol{S}=\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{v}$$

$$|\boldsymbol{S}|=\frac{1}{2}|\boldsymbol{r}|\ |\boldsymbol{v}|\sin\phi$$

となります．上の図では時間中に接線速度ベクトルが変化していませんが，これは点 P における瞬間的な面積速度と考えれば正確に一致します．

さて，図を見れば $\boldsymbol{L}$ を $2m$ で割ってやれば $\boldsymbol{S}$ となることが分かります．つまり，角運動量保存の法則は，面積速度は一定になることと同等であることがわかります．