擬テンソル

Joh @物理のかぎプロジェクト

2006-08-25

ベクトルとは，直交変換に際して次のような変換則に従う量と定義されました．

$$A'_i = \alpha_{ij} A_j \tag{1}$$

これとそっくりな，**擬ベクトル** という量が 反対称テンソルと軸性ベクトル に出てきました．

$$A'_i = \pm \alpha_{ij} A_j \tag{2}$$

違いは，± という記号があるかないかですが，擬ベクトルは，右手系と左手系が入れ替わるような座標変換に対しては，その符号を入れ替わるのでした．（擬ベクトルを，軸性ベクトルとも呼びます.）擬テンソルのこの性質を高階のテンソルにまで一般化し，やはり右手系・左手系の交換に伴って符号を変えるような量を，**擬テンソル** と呼びます．擬テンソルの一般的な定義は，この座標変換を表わす行列の行列式 $\det|A|$ を用いて，次のように定式化します．

$$A'_{i_1 i_2 \ldots i_n} = \det|\alpha| \alpha_{i_1 i_2 \ldots i_n j_1 j_2 \ldots j_n} A^{j_1 j_2 \ldots j_n} \tag{3}$$

この $\det|\alpha|$ が，± になることを次のセクションで確認します．

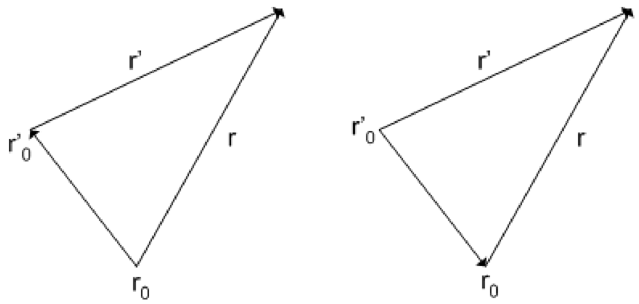
座標変換の行列式

まずはベクトルの変換から考えます．直交座標系で考え，座標変換前の基底ベクトル $(\boldsymbol{i_i}, \boldsymbol{i_j}, \boldsymbol{i_k})$，変換後の基底ベクトルを $(\boldsymbol{i'_i}, \boldsymbol{i'_j}, \boldsymbol{i'_k})$ とします．直交座標系で考えているので，基底については次の関係式がなりたちます．

$$\boldsymbol{i_i} \cdot \boldsymbol{i_j} = \delta_{ij} = \begin{cases} 1 & (i = j) \\ 0 & (i \neq j) \end{cases} \tag{4-1}$$

$$\boldsymbol{i'_i} \cdot \boldsymbol{i'_j} = \delta'_{ij} = \begin{cases} 1 & (i = j) \\ 0 & (i \neq j) \end{cases} \tag{4-2}$$

また，新旧の座標系の間には，次図のような関係があります．図中 $\boldsymbol{r_0}$ は旧座標系の原点，$\boldsymbol{r'_0}$ は新座標系の原点とします．



このとき次の関係式が分かるでしょう．

$$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r'_0} + \boldsymbol{r'} \tag{5-1}$$

$$\boldsymbol{r'} = \boldsymbol{r_0} + \boldsymbol{r} \tag{5-2}$$

これより，$A_1\boldsymbol{i_1} + A_2\boldsymbol{i_2} + A_3\boldsymbol{i_3} = A'_1\boldsymbol{i'_1} + A'_2\boldsymbol{i'_2} + A'_3\boldsymbol{i'_3}$ として，成分に関して次式がなりたちます．ダッシュのつく位置に気をつけてください．両辺とも，縮約により j について和を取る形になっています．

$$A_j\boldsymbol{i_j} = A'_j\boldsymbol{i'_j} + A'_{0j}\boldsymbol{i_j} \tag{6-1}$$

$$A'_j\boldsymbol{i'_j} = A_j\boldsymbol{i_j} + A_{0j}\boldsymbol{i'_j} \tag{6-2}$$

式 $(6-1)$ の両辺に $\boldsymbol{i_k}$ を，式 $(6-2)$ の両辺に $\boldsymbol{i'_k}$ を作用させて内積を取ると，基底の直交関係より，次式を得ます．

$$A_k = A'_j(\boldsymbol{i'_j} \cdot \boldsymbol{i_k}) + A'_{0k} \tag{7-1}$$

$$A'_k = A_j(\boldsymbol{i_j} \cdot \boldsymbol{i'_k}) + A_{0k} \tag{7-2}$$

次に，式 $(7-1)(7-2)$ 中の内積部分を，上手くテンソルの形に直すことを考えます．基底の変換則 $\boldsymbol{i'_j} = \alpha_{j'l}\boldsymbol{i_l}$ の両辺と $\boldsymbol{i_k}$ の内積を取ることで，式 $(7-1)$ 中の内積部分 $(\boldsymbol{i'_j} \cdot \boldsymbol{i_k})$ を次のように表わせるでしょう．

$$\begin{aligned}(\boldsymbol{i'_j} \cdot \boldsymbol{i_k}) &= (\alpha_{j'i}\boldsymbol{i_i}) \cdot \boldsymbol{i_k} \\ &= \alpha_{j'k}\end{aligned}$$

同様に，$\boldsymbol{i_j} \cdot \boldsymbol{i'_k} = \boldsymbol{i_j} \cdot (\alpha_{k'i}\boldsymbol{i_i}) = \alpha_{jk'}$ となります．一方，$\boldsymbol{i'_j} = \alpha_{j'l}\boldsymbol{i_l}$ の両辺と $\boldsymbol{i'_k}$ の内積を取ると次式を得ます．

$$\begin{aligned}(\boldsymbol{i'_j} \cdot \boldsymbol{i'_k}) &= (\alpha_{j'l}\boldsymbol{i_l}) \cdot (\alpha_{k'm}\boldsymbol{i_m}) \\ &= \alpha_{j'l}\alpha_{k'm}\delta_{lm} \\ &= \alpha_{j'm}\alpha_{k'm} \\ &= \delta_{j'k'}\end{aligned} \tag{8}$$

導出が長くなりましたが，式 (8) が求めていた式です．テンソルの関係式 $\alpha_{j'm}\alpha_{k'm} = \delta_{j'k'}$ を行列の形に書き換え，両辺の行列式を取ります．

$$\det[\alpha_{j'm}\alpha_{k'm}] = \det[\delta_{j'k'}] = 1$$

クロネッカーのデルタの行列式は添字に関わらず 1 です．また，$[\alpha_{j'm}]$ と $[\alpha_{k'm}]$ の行列式は同じはずですから，左辺は $(\det[\alpha_{j'm}])^2$ だと考えても良く，結局次式を得ます．

$$\det[\alpha_{j'm}] = \pm 1$$

式 (3) は次のように書けます．

$$A'_{i_1 i_2 \ldots i_n} = \pm\alpha_{i_1 i_2 \ldots i_n j_1 j_2 \ldots j_n} A^{j_1 j_2 \ldots j_n} \tag{9}$$

式 (3) もしくは式 (9) を擬テンソルの定義式とします．符号は，右手系と左手系が入れ替わる座標変換においては -1，右手系と左手系が入れかわらない座標変換においては $+1$ に取ります．