単振動　〜等速円運動の射影〜

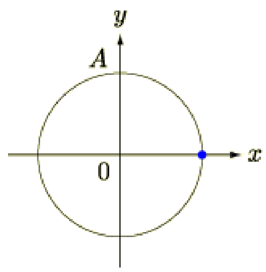
tomo @物理のかぎプロジェクト

2005-07-04

単振動[*1] は，物理学のいろいろな場面で登場する重要な運動です．ばねの運動で登場したり，振り子の運動で登場したり，はたまた電気振動なんていうものもあります．以下では，等速円運動の射影として単振動を紹介し，速度や加速度についてもみていきます．等速円運動 についてまだ学習していない人は，そちらからご覧下さい．

単振動は等速円運動の射影だ

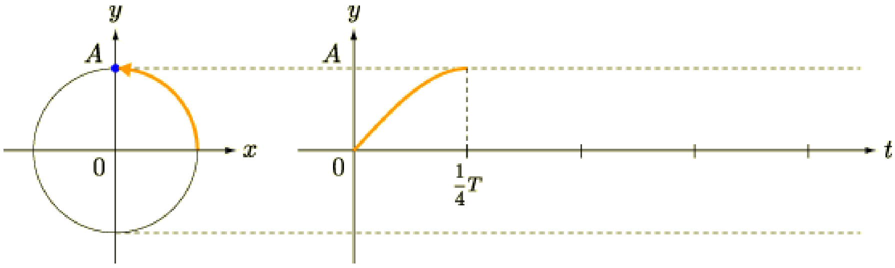
半径 A の円周上を運動する 等速円運動 を考えます．分かりやすいように，$x-y$ 平面状に原点を中心とする半径 A の円を描いておきます．物体は時刻 $t=0$ のとき点 $(A,0)$ を出発して，角速度 ω で運動します．



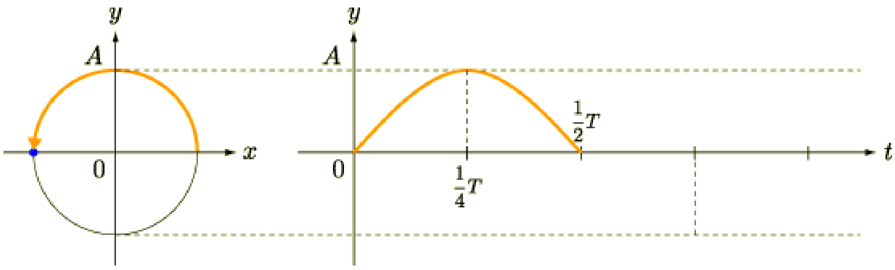
この等速円運動について，y 軸への射影を考えてみましょう．時間を追って図を描くと，以下のようになります（ T は周期）．

- $t=\frac{1}{4}T$

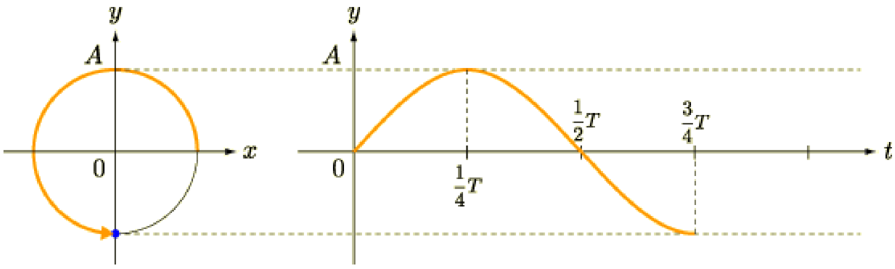
*1 「単振動」という表現の他に，「調和振動」という表現もよく使います．「単振動」と「(1 次元) 調和振動」は同じものを指します．また，「調和振動子」と言った場合には，振動しているもの（振動の性質をもつもの）を指します．



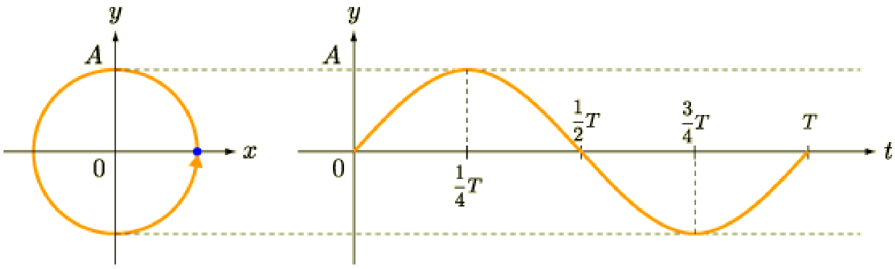
- $t = \frac{1}{2}T$



- $t = \frac{3}{4}T$



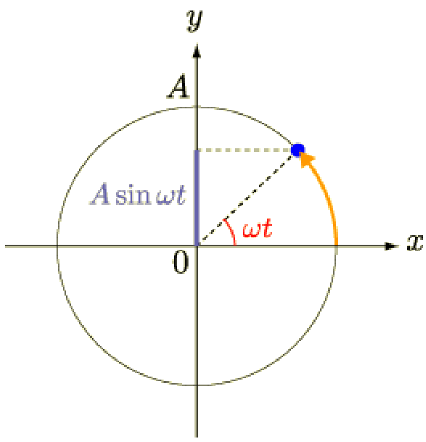
- $t = T$



この y 軸への射影こそが，単振動だというわけです．

変位はどのように表されるか

変位 y がどのように表されるか，考えてみましょう．時刻 $t = 0$ のとき点 $(A, 0)$ を出発して，角速度 ω で運動した場合，t[s] 後には以下のようになっているはずです．



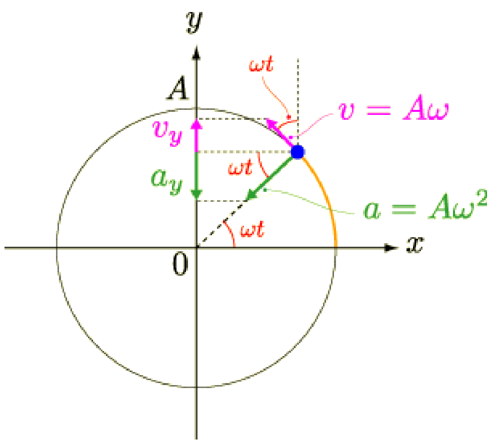
つまり，変位 y は,

$$y = A\sin\omega t$$

と表されることになります．A のことを「振幅」, sin の中身（ここでは ωt ）のことを「位相」と呼びます．

速度と加速度はどのように表されるか

単振動の速度 v_y と単振動の加速度 a_y はどのようになっているでしょうか．図で示すと以下のようになります．速度 v，加速度 a を，変位と同様に y 軸に射影します．



$v = A\omega$ を y 軸に射影して,

$$v_y = r\omega\cos\omega t$$

$a = A\omega^2$ を y 軸に射影して,

$$a_y = -r\omega^2\sin\omega t$$

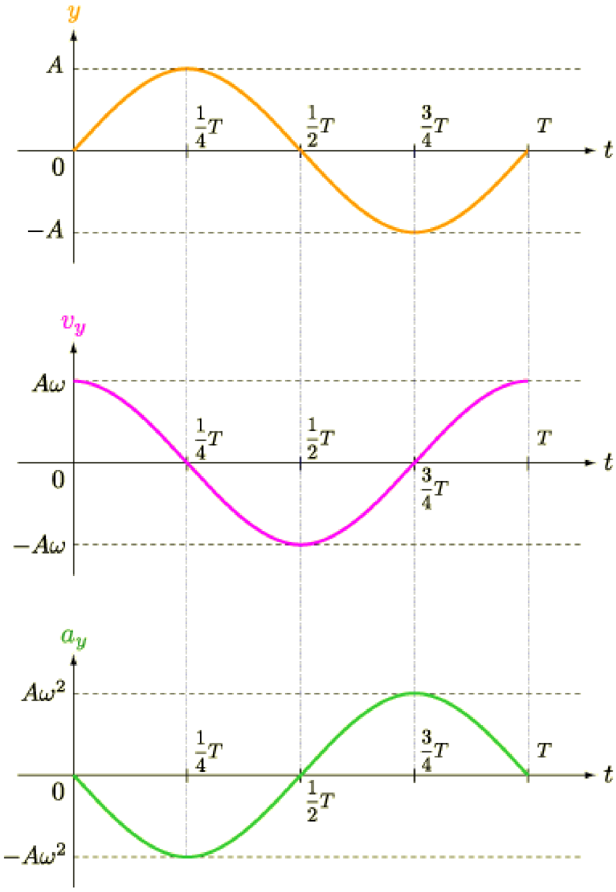
となります．また，位相の部分を $\omega = \frac{2\pi}{T}$ （説明は 等速円運動 を参照）を用いて,

$$y = A\sin\frac{2\pi}{T}t$$

$$v_y = A\omega \cos \frac{2\pi}{T} t$$

$$a_y = -A\omega^2 \sin \frac{2\pi}{T} t$$

と書き換えることができます．y，v_y，a_y を並べてグラフに描くと以下のようになります．



補足

　高等学校の物理では微積分が出てきませんが，

$$v_y = \frac{dy}{dt}$$

$$a_y = \frac{dv_y}{dt} = \frac{d^2y}{dt^2}$$

という関係が成り立っています．