テイラー級数

崎間@物理のかぎプロジェクト

2004-05-10

「テイラー展開すると…」なんて言葉が教科書によく出てきます．これはテイラー級数で表す，という意味で使われています．その頻出するテイラー級数を，簡単に紹介します．

テイラー級数

つぎの無限級数

$$
\begin{aligned}
f(x) &= f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \cdots \\
&= f(a) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n
\end{aligned}
$$

を関数 $f(x)$ の $x=a$ におけるテイラー級数といいます．

マクローリン級数

主に有限の n で展開を止めて近似式として用います．たいていは 1 次か 2 次程度で近似します．テイラー級数で $a=0$ のもの，すなわち

$$
\begin{aligned}
f(x) &= f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \cdots \\
&= f(0) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n
\end{aligned}
$$

をマクローリン級数といいます．でも単にテイラー級数と言った場合も，このマクローリン級数を指すことが多いようです．

例

例として，$\sin(x)$ の $x=0$ でのテイラー級数（マクローリン級数）を見てみます．素直に公式に当てはめると

$$\sin(x) = \sin(0) + \frac{\sin'(0)}{1!}x + \frac{\sin''(0)}{2!}x^2 + \frac{\sin'''(0)}{3!}x^3 + \frac{\sin''''(0)}{4!}x^4 + \cdots$$

ここで

$$\begin{aligned}
\sin(0) &= 0 \\
\sin'(0) &= \cos(0) = 1 \\
\sin''(0) &= \cos'(0) = -\sin(0) = 0 \\
\sin'''(0) &= \cos''(0) = -\sin'(0) = -\cos(0) = -1 \\
\sin''''(0) &= \cos'''(0) = -\sin''(0) = -\cos'(0) = \sin(0) = 0
\end{aligned}$$

ですから，

$$\begin{aligned}
\sin(x) &= 0 + \frac{1}{1!}x + \frac{0}{2!}x^2 + \frac{-1}{3!}x^3 + \frac{0}{4!}x^4 + \cdots \\
&= x - \frac{x^3}{3!} + \cdots
\end{aligned}$$

となります．$\sin^n(0)$ の微分を繰り返すと分かるように，この先もずうっと偶数番目の項は消え，奇数番目の項がプラスマイナスを繰り返しながら残るので，結局

$$\begin{aligned}
\sin(x) &= x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}x^{2n-1}}{(2n-1)!}
\end{aligned}$$

となります．この右辺のように数列の無限個の和で表されるものを「べき級数」と呼びます．この例で $\sin x$ をべき級数に変形したように，ある関数をべき級数で表すことを「べき級数展開」と呼びます．

もう一つ

また，物理では

$$\begin{aligned}
f(x+dx) &= f(x) + \frac{f'(x)}{1!}dx + \frac{f''(x)}{2!}(dx)^2 + \cdots \\
&= f(x) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x)}{n!}(dx)^n
\end{aligned}$$

というテイラー級数も良く使われます．