逆行列のよく使う性質

クロメル@物理のかぎプロジェクト

2010-04-19

逆行列を掛けるということは，どういうことなのか．一つの解釈を書きたいとおもいます．

基本的性質

行列はベクトルを並べたものとして考えると，分かり易いです．
例えば，

$$
\begin{aligned}
A\boldsymbol{b}_1 &= \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ -1 & 4 & 5 \\ 1 & -2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \\
&= 3 \times \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} - 1 \times \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix} + 2 \times \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 3 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 11 \end{pmatrix}
\end{aligned} \tag{1}
$$

$$
\begin{aligned}
A\boldsymbol{b}_2 &= \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ -1 & 4 & 5 \\ 1 & -2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} + 1 \times \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix} + 1 \times \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 3 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 6 \\ 8 \\ 2 \end{pmatrix}
\end{aligned} \tag{2}
$$

$$
\begin{aligned}
A\boldsymbol{b}_3 &= \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ -1 & 4 & 5 \\ 1 & -2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix} \\
&= 2 \times \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} + 4 \times \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix} - 1 \times \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 3 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 12 \\ 9 \\ -9 \end{pmatrix}
\end{aligned} \tag{3}
$$

という風に，行列と列ベクトルの積は，行列 A を列ベクトル $\boldsymbol{a}_i (i = 1, 2, 3)$ に分解し，右から掛ける列ベクトル $\boldsymbol{b}$ の成分をその係数にして掛け合わせたものとなります.

この三つの列ベクトルを並べて行列を作りますと，

$$
\begin{aligned}
AB &= \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ -1 & 4 & 5 \\ 1 & -2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & 4 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 4 & 6 & 12 \\ 3 & 8 & 9 \\ 11 & 2 & -9 \end{pmatrix}
\end{aligned} \tag{4}
$$

逆行列

ここで，有限次元の行列 A を構成する列ベクトル $\boldsymbol{a}_i (i = 1, 2, 3)$ を並べたものとして，更に，A が逆行列を持つ（正則である）と考えてみましょう[*1]．A の逆行列を A^{-1} と置きます.

すると，逆行列の定義から，

$$
\begin{aligned}
A^{-1}A &= A^{-1} \begin{pmatrix} \boldsymbol{a}_1 & \boldsymbol{a}_2 & \boldsymbol{a}_3 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}
\end{aligned} \tag{5}
$$

つまり，これを分解すると，

$$
A^{-1}\boldsymbol{a}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}
$$

$$
A^{-1}\boldsymbol{a}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \tag{6}
$$

[*1] 行列は行基本変形や列基本変形で標準形を求めたとき，階数が行列の次元に等しいと正則といい，逆行列をもつのでした.

$$A^{-1}\boldsymbol{a}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

と成ります.

重ね合わせの原理

行列と列ベクトルは線形性を持ちます.
つまり，行列 A, B とし，列ベクトル $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}$ は,

$$(A+B)\boldsymbol{x} = A\boldsymbol{x} + B\boldsymbol{x} \tag{7}$$

$$A(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}) = A\boldsymbol{x} + A\boldsymbol{y} \tag{8}$$

が成り立ちます.
よって，式 (6) の第一式に係数 x_1 を掛け，第二式に x_2 を掛け，第三式に x_3 を掛け足し合わせたものを作ると,

$$\begin{aligned} A^{-1}\boldsymbol{x} &= A^{-1}(x_1\boldsymbol{a}_1 + x_2\boldsymbol{a}_2 + x_3\boldsymbol{a}_3) \\ &= \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \end{aligned} \tag{9}$$

と成ります．つまり，逆行列 A^{-1} は，列ベクトル $\boldsymbol{x}$ を，列ベクトル $\boldsymbol{a}_i$ の線形結合

$$\boldsymbol{x} = \sum_i x_i \boldsymbol{a}_i \tag{10}$$

として表した時の，$\boldsymbol{a}_i$ の係数を列ベクトルとして取り出す操作であることが分かります.
これで，列ベクトル $\boldsymbol{x}$ の代わりに，行列 X に作用させた時を考えると,

$$\begin{aligned} A^{-1}X &= A^{-1}\begin{pmatrix} x_1\boldsymbol{a}_1 + x_2\boldsymbol{a}_2 + x_3\boldsymbol{a}_3 & y_1\boldsymbol{a}_1 + y_2\boldsymbol{a}_2 + y_3\boldsymbol{a}_3 & z_1\boldsymbol{a}_1 + z_2\boldsymbol{a}_2 + z_3\boldsymbol{a}_3 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{pmatrix} \end{aligned} \tag{11}$$

となる訳です.

その他応用例

ここで簡単な応用例を書きます．n 次元正方行列 A の固有ベクトルが，次元の数 n 個あるとき，固有値を λ_i，固有ベクトルを $\boldsymbol{p}_i$ とします．固有ベクトルを並べた n 次の行列を P とします．ここで，$P^{-1}AP$

という行列を考えると，

$$
\begin{aligned}
P^{-1}AP &= P^{-1}\begin{pmatrix} \lambda_1 \boldsymbol{p}_1 & \lambda_2 \boldsymbol{p}_2 & \cdots & \lambda_n \boldsymbol{p}_n \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_n \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

となり，対角化されることが分かりますね．

それでは，今日はこの辺で．