面積分

Joh @物理のかぎプロジェクト

2006-10-11

スカラー関数 $f(x_1, x_2, x_3)$ を積分することを考えます．積分領域の形には色々あり，例えば 線積分 は，積分領域が曲線に制限されたものでした．ここでは，積分領域が曲面に制限されているものを考えます．

変数 x_1, x_2, x_3 が，ある曲面 D 上を動き回るとし，D を点 M_i $(1 \leq i \leq n)$ を中心とする n 個の区画に分割します．そして，D 上の点 M_i における関数の値を $f(M_i)$，M を中心とする微小面積を ΔS_i とし，次のような量を考えます．

$$\sum_{i=1}^{n} f(M_i)\Delta S_i \tag{1}$$

現在の状況を図にすると，次のような感じでしょう．（曲面上の各微小区画で，それぞれ関数値が与えられているというイメージを一生懸命描いてみました．式 (1) は，次図の柱の体積の総和になりますね．）

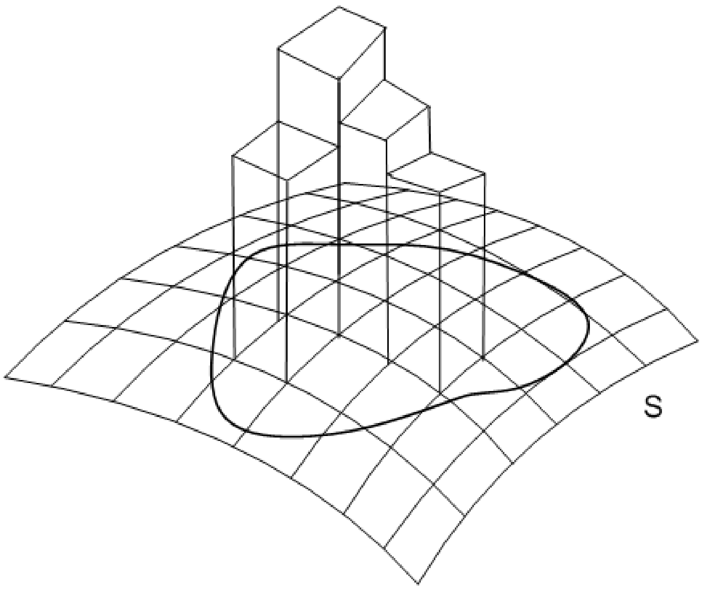


図 1　各微小面積×関数値の和は，こんなイメージでしょうか．なかなか絵は上達しません．

ここで $n \to \infty$ なる極限を取り，同時に分割区画を極限まで小さくして行くと，式 (1) は次の積分形で表現されることになります．これを **面積分** と呼びます．

$$\int_D f dS \tag{2}$$

ポイントは，積分領域が曲面になっているという点です．式 (2) はスカラーの形ですが，微小面積要素 dS を，面積ベクトル の形で $d\boldsymbol{S}=\boldsymbol{n}dS$ と書いて（ $\boldsymbol{n}$ は法線ベクトルです)，ベクトル形で表現する面積分もあります．こちらの方が，物理学の計算では重要です．

$$\int_D f d\boldsymbol{S} = \int_D f\boldsymbol{n}dS$$
$$= \boldsymbol{e}_{\boldsymbol{x_1}}\int_D f(\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{e}_{\boldsymbol{x_1}})dS + \boldsymbol{e}_{\boldsymbol{x_2}}\int_D f(\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{e}_{\boldsymbol{x_2}})dS + \boldsymbol{e}_{\boldsymbol{x_3}}\int_D f(\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{e}_{\boldsymbol{x_3}})dS \tag{3}$$

図 2　メビウスの輪．表と裏の決められない曲面の代表的な例だ．写真は Max Bill 氏の作品．（花崗岩製，パリ・ポピドゥーセンター所蔵）

ベクトルの面積分

式 (2)(3) では被積分関数がスカラーでしたが，ベクトル関数の面積分を考えることもできます．ベクトルには，スカラー積，内積，外積といった演算がありましたから，面積分にも次の 3 種を考えることができます．

$$\int_D \boldsymbol{A}dS = \int_D A_1 dS + \int_D A_2 dS + \int_D A_3 dS \tag{4}$$

$$\int_D \boldsymbol{A}\cdot d\boldsymbol{S} = \int_D \boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{n}dS$$
$$= \int_D A_1(\boldsymbol{e_1}\cdot\boldsymbol{n})dS + \int_D A_2(\boldsymbol{e_2}\cdot\boldsymbol{n})dS + \int_D A_3(\boldsymbol{e_3}\cdot\boldsymbol{n})dS \tag{5}$$

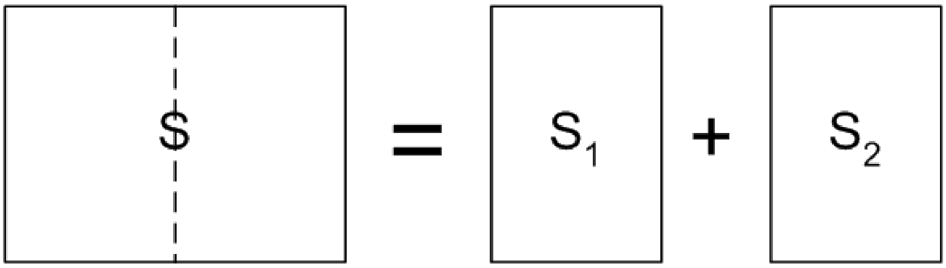
[*1] ただし，ここで積分領域として考えている曲面には，全て『表・裏』の向きが定義できるものとします．どちらが表でどちらが裏か，というのは便宜的に決めて良いのですが，一度決めれば，表裏が区別できるというのが重要です．世の中には次図のメビウスの輪のように，表と裏を区別できないような曲面も存在します．今後，面積分に関する記事では，特に断りのない限り，表裏を区別できる曲面だけを扱うものとします．

$$\begin{aligned}\int\limits_D \boldsymbol{A}\times d\boldsymbol{S} &= \int\limits_D \boldsymbol{A}\times\boldsymbol{n}dS \\ &= \boldsymbol{e_1}\int\limits_D (A_2n_3 - A_3n_2)dS + \boldsymbol{e_2}\int\limits_D (A_3n_1 - A_1n_3)dS + \boldsymbol{e_3}\int\limits_D (A_1n_2 - A_2n_1)dS \qquad (6)\end{aligned}$$

式 (5) の形の面積分には，後で勉強するように ガウスの発散定理 という有名な定理が関係し，実際に物理学に関係する場面で一番よく出てくるものです．

面積分の和

面積分の領域 S を複数の領域に分割できる場合，面積分を積分領域に従って和の形に表すことができます．この定理は応用上，非常に重宝します．変な形の積分領域は，分かりやすい形に分割してしまえば良いわけです．



$$\int\limits_{S_1+S_2} f dS = \int\limits_{S_1} f dS + \int\limits_{S_2} f dS$$

$$\int\limits_{S_1+S_2} f d\boldsymbol{S} = \int\limits_{S_1} f d\boldsymbol{S} + \int\limits_{S_2} f d\boldsymbol{S}$$

$$\int\limits_{S_1+S_2} \boldsymbol{A} dS = \int\limits_{S_1} \boldsymbol{A} dS + \int limits_{S_2} \boldsymbol{A} dS$$

$$\int\limits_{S_1+S_2} \boldsymbol{A}\cdot d\boldsymbol{S} = \int\limits_{S_1} \boldsymbol{A}\cdot d\boldsymbol{S} + \int\limits_{S_2} \boldsymbol{A}\cdot d\boldsymbol{S}$$

$$\int\limits_{S_1+S_2} \boldsymbol{A}\times d\boldsymbol{S} = \int\limits_{S_1} \boldsymbol{A}\times d\boldsymbol{S} + \int\limits_{S_2} \boldsymbol{A}\times d\boldsymbol{S}$$