任意の方向を向いたスピンのｘｙｚ方向固有状態での展開

クロメル@物理のかぎプロジェクト

2010-06-05

この記事は，スピン一重項と三重項のｘｙ方向固有状態での展開という記事の姉妹編です．どちらを先に読んでも構いません．

パウリ行列

まず，パウリ行列を次の様に定めます．

$$\boldsymbol{\sigma} = (\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z) \tag{1}$$

$$\sigma_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \tag{2}$$

$$\sigma_y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \tag{3}$$

$$\sigma_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \tag{4}$$

スピンの状態は，二成分のスピノール

$$\chi \equiv \begin{pmatrix} c_+ \\ c_- \end{pmatrix} \tag{5}$$

また，その共役転置,

$$\chi^\dagger \equiv \begin{pmatrix} c_+^* & c_-^* \end{pmatrix} \tag{6}$$

で表わされます．

方向 $\boldsymbol{n}$ を次のようにオイラー角で定めます.

$$\boldsymbol{n} = \begin{pmatrix} \sin\theta\cos\phi \\ \sin\theta\sin\phi \\ \cos\theta \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix} \tag{7}$$

今，任意の方向 $\boldsymbol{n}$ を向いたスピンは，固有値を λ として，

$$(\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{n})\chi = \lambda\chi \tag{8}$$

つまり，

$$\begin{aligned}(\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{n})\chi &= (\alpha\sigma_x + \beta\sigma_y + \gamma\sigma_z)\chi \\ &= \begin{pmatrix} \gamma & \alpha - i\beta \\ \alpha + i\beta & -\gamma \end{pmatrix}\chi \\ &= \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta(\cos\phi - i\sin\phi) \\ \sin\theta(\cos\phi + i\sin\phi) & -\cos\theta \end{pmatrix}\chi \\ &= \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta e^{-i\phi} \\ \sin\theta e^{i\phi} & -\cos\theta \end{pmatrix}\begin{pmatrix} c_+ \\ c_- \end{pmatrix}\end{aligned} \tag{9}$$

より，

$$\begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta e^{-i\phi} \\ \sin\theta e^{i\phi} & -\cos\theta \end{pmatrix}\begin{pmatrix} c_+ \\ c_- \end{pmatrix} = \lambda\begin{pmatrix} c_+ \\ c_- \end{pmatrix} \tag{10}$$

と求められます.

この固有値問題を解くと，

$$\begin{aligned}\lambda &= \pm\sqrt{\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2} \\ &= \pm 1\end{aligned} \tag{11}$$

ですから，$\lambda = 1$ に対して，

$$\begin{pmatrix} 1 - \cos\theta & -\sin\theta e^{-i\phi} \\ -\sin\theta e^{i\phi} & 1 + \cos\theta \end{pmatrix}\begin{pmatrix} c_+ \\ c_- \end{pmatrix} = 0 \tag{12}$$

$$(1 - \cos\theta)c_+ - \sin\theta e^{-i\phi}c_- = 0$$

より，固有状態 χ_+ は，規格化因子を A として，

$$\begin{aligned}\chi_1 &= \begin{pmatrix} c_+ \\ c_- \end{pmatrix} \\ &= A\begin{pmatrix} \sin\theta \\ (1 - \cos\theta)e^{i\phi} \end{pmatrix}\end{aligned}$$

なので，規格化因子を求めると，

$$
\begin{aligned}
\chi_1^\dagger \chi_1 &= A^2 \begin{pmatrix} \sin\theta & (1-\cos\theta)e^{-i\phi} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sin\theta \\ (1-\cos\theta)e^{i\phi} \end{pmatrix} \\
&= A^2(\sin^2\theta + (1-\cos\theta)^2 e^{i\phi - i\phi}) \\
&= A^2 2(1-\cos\theta) \\
&= A^2 4\sin^2(\frac{\theta}{2}) && = 1
\end{aligned}
$$

よって，

$$
A = \frac{1}{2\sin\dfrac{\theta}{2}}
$$

注は，この様に[*1] 入れます．

*1 これも半角スペースに気をつけてください．記事の中で改行したいときは，この様に半角スペースを入れてください．