力学的エネルギー保存則の導出

崎間@物理のかぎプロジェクト

2003-08-13

力学的エネルギー保存則を運動方程式から導いてみましょう.

1. 運動方程式を立てる
2. 両辺に速度の成分を掛ける
3. 両辺を微分の形で表す
4. イコールゼロの形にする

という手順で導きます.

運動方程式を立てる

まず，つぎのような運動方程式を考えます.

$$ma = -kx + mg$$

これは重力 mg とばねの力 $-kx$ が働いている物体（質量は m ）の運動方程式です.

両辺に速度の成分を掛ける

つぎに，運動方程式の両辺に速度の成分 v を掛けます.

$$mav = -kxv + mgv \tag{1}$$

なぜそんなことをするかというと，こうすると都合がいいからです．どう都合がいいのかはもう少し後で分かります．

両辺を微分の形で表す

式 (1) は

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}mv^2\right)=\frac{d}{dt}\left(-\frac{1}{2}kx^2+mgx\right) \tag{2}$$

と微分の形で表すことができます．左辺は運動エネルギー，右辺第一項はバネの位置エネルギー（の符号が逆になったもの），右辺第二項は重力の位置エネルギー（の符号が逆になったもの），のそれぞれ時間微分の形になっています．なぜこうなるのかを説明します．

加速度 a と速度 v はそれぞれ

$$a=\frac{dv}{dt},\qquad v=\frac{dx}{dt}$$

という関係にあります．加速度は速度の時間微分，速度は位置の時間微分です．この関係を使って計算すると式 (2) の左辺は

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}mv^2\right)=\frac{1}{2}m\frac{d}{dt}(v^2)=\frac{1}{2}m\cdot 2v\frac{dv}{dt}=mav \tag{3}$$

となります．ここで 1 行目から 2 行目のところで合成関数の微分公式を使っています．式 (3) は式 (1) の左辺と一緒ですね．運動方程式に速度 v をあらかじめ掛けておいたのは，このように運動方程式をエネルギーの微分で表すためです．同じように計算していくと式 (2) の右辺の第 1 項は

$$\frac{d}{dt}\left(-\frac{1}{2}kx^2\right)=-\frac{1}{2}k\frac{d}{dt}(x^2)=-\frac{1}{2}k\cdot 2x\frac{dx}{dt}=-kxv$$

となり，式 (2) の右辺第 1 項と同じになります．第 2 項は

$$\frac{d}{dt}(mgx)=mg\frac{dx}{dt}=mgv$$

となり，式 (1) の右辺第 2 項と同じになります．

なんだか計算がごちゃごちゃしてしまいましたが，式 (1) と式 (2) が同じものだということがわかりました．これが言いたかったんです．

イコールゼロの形にする

式 (2) の右辺を左辺に移項すると

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}mv^2+\frac{1}{2}kx^2-mgx\right)=0$$

という形になります．この式は何を意味しているでしょうか．カッコの中身はそれぞれ運動エネルギー，バネの位置エネルギー，重力の位置エネルギーを表しているのでした．

それらを全部足して，時間微分したものがゼロになっています．ということは，エネルギーの合計は時間的に変化しないことになります．つまりエネルギーの合計は常に一定になるので，エネルギーが保存されるということがわかります．