

ベクトル解析奮闘記 3

やかん@物理のかぎプロジェクト

YYYY-MM-DD

大学に入ると”ベクトル解析”を習うのですが，高校でやる”ベクトル”よりもちょっと手ごわそうです．黒板に先生が書いた式も，難しそうだし・・・もしよろしかったら私と一緒にベクトル解析の基本，やってみませんか．

(続き物なので [ベクトル解析奮闘記 1](#) からお読みいただくと嬉しいです！)

自宅で復習 (rot の巻)

いよいよ最後，rot . 読みは”ローテーション”(*rotation* = 回転). 先生が黒板に書いた式は・・・，う～ん，これは ∂ ばかりで，grad よりも div よりも，一層難しそうな顔をしている・・・．眺めていてもわからないので，先生が言われた”渦(うず)の事ですよ！”をヒントに，考えてみる事にしました．

小川の流れをヒントに

目の前を左から右に水が流れている小川があったとします．普通のイメージでは，さらさらと渦など作らずに，手前岸付近の水も，向こう岸付近の水も，平行に流れていきますよね(もうすでに頭の中で渦が巻いている方もいらっしゃるでしょうか・・・)．さて平行なはずの水流が，一体どうなれば渦を巻くのでしょうか？川の上流(左)から下流(右)の方向・向きを x 軸， x 軸に垂直で，こちらの岸から向こう岸に行く方向・向きを y 軸とすると，ある瞬間手前岸から決まった距離にある水流が，下流に行けば行くほど(x 軸を正に行けば行くほど)，向こう岸の方にカーブする(y 軸の正方向に偏位する)と，なんだか反時計回りに渦を巻きそうです．これは x の増加に対応する y の増加(変化率)が正という事だから，水流の速度を表すベクトル関数を

$$\vec{A} = (F, G)$$

Explicit markup ends without a blank line; unexpected unindent.

とすると， y 方向成分は，スカラー関数 G で表されるから，.. raw:: latex

```
begin{align*} \frac{\partial G}{\partial x} \end{align*}
```

Block quote ends without a blank line; unexpected unindent.

が正で、なおかつこの値が大きければ大きいほど渦は強そうですね。

でもそれだけでいいんでしょうか？

さてよ、もしかしたら、手前より向こう岸に近い方が水流が早いかもしれません。もしそうなら、向こう岸の水流は手前方向に回り込んできて、さっきとは丁度逆に、時計回りの渦を作りそうです。これは、“向こう岸に行く（ y が増加する）”ほど、“流れが速くなる（ F が増加する）”わけですから、同様に数式で表すと

$$\frac{\partial F}{\partial y}$$

となります。従って、反時計回り方向の渦は、それを差し引いた分、

$$\frac{\partial G}{\partial x} - \frac{\partial F}{\partial y}$$

が正で、値が大きければ大きいほど、強くおこりそうです。

渦の方向・向き

ところでこの渦、どの方向に向いていると表現したらいいのでしょうか？ x 軸方向？、それとも y 軸方向でしょうか？でも、見る間にぐるぐる回っているのだから、いずれの方向で表すのも難しそうです。むしろ渦の真中に、水面と垂直に棒を立てて目印とし、“棒を軸とした周りの渦である”とした方がわかりやすそうですね。渦の強さは棒の長さで表せば、遠目に見ても一目瞭然です。 x 、 y と来たので、棒の方向は z 軸になります。つまり z 軸方向の渦（これ以降、回転）はさきほどの式.. raw:: latex

$$\begin{align*} \frac{\partial G}{\partial x} - \frac{\partial F}{\partial y} \end{align*}$$

Block quote ends without a blank line; unexpected unindent.

と考えられます。ここで小川のイメージから離れますが、ベクトル関数を2次元（平面）から3次元（空間）に拡張して $\vec{A} = (F, G, H)$ と置き、 x 軸方向の回転についても、順に変数を入れ替えて、

$$\frac{\partial H}{\partial y} - \frac{\partial G}{\partial z}$$

y 軸方向の回転についても、順に変数を入れ替えて、

$$\frac{\partial F}{\partial z} - \frac{\partial H}{\partial x}$$

Explicit markup ends without a blank line; unexpected unindent.

とできます。これらはそれぞれ方向の違う量なので、単純に足し算はできず、それぞれ回転の x 方向成分、 y 方向成分、 z 方向成分として下記のように列記するしかありません。

$$\left(\frac{\partial H}{\partial y} - \frac{\partial G}{\partial z}, \frac{\partial F}{\partial z} - \frac{\partial H}{\partial x}, \frac{\partial G}{\partial x} - \frac{\partial F}{\partial y} \right)$$

これはスカラー関数の三つ組みとも言えますが、それぞれを x, y, z 成分に持つ、3次元ベクトルとも考えられますね。このベクトルの事を \vec{A} の回転 (またはローテーション)、記号では、 $\text{rot}\vec{A}$ と呼ぶようです。つまり回転軸は、より回転の強い軸方向に近く向いているわけです。なお普通は、 $\vec{A} = (A_x, A_y, A_z)$ という風に表記するので.. raw:: latex

```
begin{align*} \{\rm \ rot\}\vec{A}=\left(\frac{\partial A_z}{\partial y}-\frac{\partial A_y}{\partial z},\frac{\partial A_x}{\partial z}-\frac{\partial A_z}{\partial x},\frac{\partial A_y}{\partial x}-\frac{\partial A_x}{\partial y}\right)
```

Definition list ends without a blank line; unexpected unindent.

```
end{align*}
```

という形になります (目が回りそう・・・)。

一体、何の役に？

さて、この ” 回転 ”、何に使うのでしょうか？ベクトル解析全体が、電磁気学っぽいですが、棒の周りの ” 回転 ” というと、例えば、電線に電流を流した際に、周りにできる磁界ベクトルなどを表すのに使えるそうです。磁界ベクトルを \vec{H} 、電流密度ベクトルを \vec{i} とすると、

$$\text{rot}\vec{H} = \vec{i}$$

となる・・・、そうですよ。

みなさん、これからもベクトル解析、電磁気学頑張ってくださいね。応援してます！ (^-^) (私も頑張ります (>_<))

@@information:イラスト: @@