平方完成の図形的イメージ

崎間@物理のかぎプロジェクト

査読中

2 次方程式を解く際,「平方完成」という操作を行います．はじめて授業で習ったとき，どうも変形の本質というか，イメージが掴めなかった方も多いのではないでしょうか．平方完成の“ 図形的イメージ ”を捉えることを目標に，この記事を書きました.

平方完成とは

2 次方程式を解くときに,「なんとかの二乗＝定数」という形に変形することを，平方完成と呼びます．たとえば

$$x^2 + bx = c$$

という 2 次方程式を平方完成すると,

$$\left(x + \frac{b}{2}\right)^2 = c + \left(\frac{b}{2}\right)^2$$

になります．この式変形の意味を，何とか図形的にイメージすることはできないでしょうか.

図形的意味

一般式ではイメージし辛いので，つぎのように具体的な 2 次方程式を考えます.

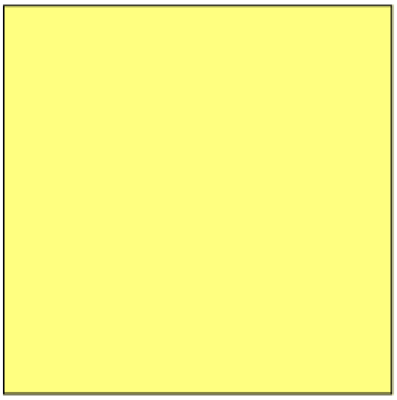
$$x^2 + 11x = 33 \tag{1}$$

この式の意味は「ある数を二乗したものと，ある数に 11 を掛けたものを足すと，33 である」ということです．そして，方程式の解を求めるとは,「ある数」が具体的にいくらなのかを決めることです．式 (1) をなんとか図形的に表したいのですけど，どうしよう．そうだ,“ 2 次 ”なのだから，面積に例えられないでしょうか．四角形の面積は，一辺掛ける一辺，という 2 次の問題です．特に正方形ならば，辺の長さの二乗，という問題になります．2 次方程式を，正方形の面積を求める問題[*1] に置き換えてみましょう.

[*1] この図形的な方法は，アラビアのアル・クワリズミという数学者が考えたそうです．ちなみに,“ アル・クワリズミ ”は“ アルゴリズム ”の語源だとか.

正方形とその面積

まずは式 (1) の右辺を，正方形の面積として表現することにします．正方形の絵を描いておきます．



正方形全体の面積 $= 33$

残るは式 (1) の左辺を，正方形の辺の長さで表せれば，2 次方程式を図形的に表したことになります．しかし式 (1) の左辺は

$$x^2 + 11x$$

なので，正方形の辺の長さにする，と言ってもなんだか良くわかりません．しかしこれが x^2 だったらどうでしょう．この場合，辺の長さは x で良いですよね．一辺の長さが x の正方形の面積は， x^2 ですからね．

$x^2 + 11x$ を「何とかの二乗」に近づけるため，つぎの式変形を行います．

$$x^2 + 11x = \left(x + \frac{11}{2}\right)^2 - \left(\frac{11}{2}\right)^2 \tag{2}$$

ひとまず,「何とかの二乗」に近づきました．マイナスが付いた項が出てくるのは，両辺の値を等しくするためです．式 (2) の右辺を式 (1) の左辺に代入してみましょう．

$$\left(x + \frac{11}{2}\right)^2 - \left(\frac{11}{2}\right)^2 = 33 \tag{3}$$

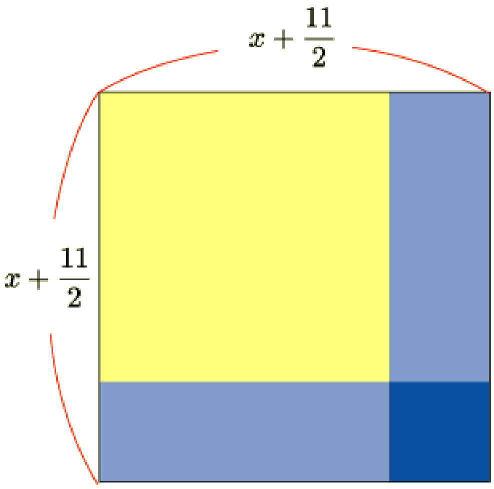
となります．

仮にマイナスの項を無視して考える

ここで一時的に，式 (3) においてマイナスの項を「なかったこと」にして考えてみると

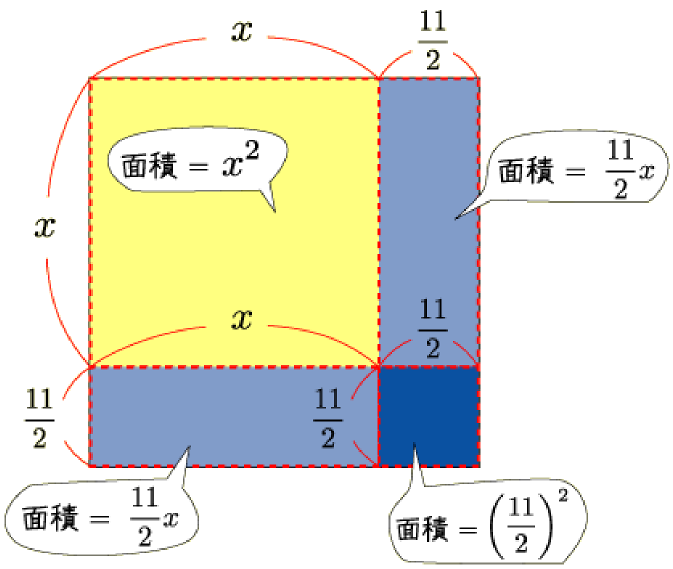
$$\left(x + \frac{11}{2}\right)^2 = 33$$

であり，この式は，図形的につぎの図で表せます．一辺の長さが $x+\frac{11}{2}$ の正方形ですね．



正方形全体の面積 $= 33$

色分けしているのにはちゃんと意味があります．図にもう少し情報を書き込んでみます．



正方形全体の面積 $= 33$

一辺の長さが $x+\frac{11}{2}$ であるという情報を元に，このように，全体を 4 つの四角形に分けることができます．

- 面積 x^2 の正方形が 1 つ
- 面積 $\frac{11}{2}x$ の長方形が 2 つ，
- 面積 $\left(\frac{11}{2}\right)^2$ の正方形が 1 つ

です．図の右下の，面積 $\left(\frac{11}{2}\right)^2$ の正方形に注目してください．

マイナスの項もちゃんと考える

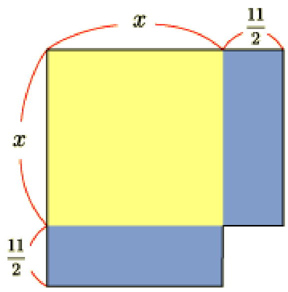
マイナスの項をちゃんと考えるには，両辺に「マイナスの項と同じもの」を足して打ち消す，という方針を取ります．つまり

$$\left(x+\frac{11}{2}\right)^2-\left(\frac{11}{2}\right)^2=33$$

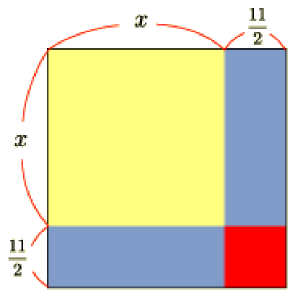
を

$$\left(x+\frac{11}{2}\right)^2=33+\left(\frac{11}{2}\right)^2 \tag{4}$$

とすれば良いのですね．いまの場合，まるっきり無視したのではなく，左辺から引いた分を右辺に足しているので，方程式の整合性は保たれています．しかし今度は，全体の面積に相当する右辺の値が増えてしまいました．これは，つぎの図のように考えます．



全体の面積 $=33$



全体の面積 $=33+\left(\frac{11}{2}\right)^2$

左側の「一部が欠けた正方形」の面積こそが，式 (1) の右辺に相当し，右側の「ちゃんとした正方形」が，変形した式 (4) の右辺に相当している，ということです．

まとめ

平方完成とは，このように正方形を完成させて，問題解決を簡単にすることだったのです．

$$x^2+11x=33$$

のように x^2 の項と x の項が別々だと難しいですが，

$$\left(x+\frac{11}{2}\right)^2=33+\left(\frac{11}{2}\right)^2$$

と平方完成すると x は一箇所にまとまるので，問題を考えやすくなります*2．変形の必然性，意味が少しでも納得できれば記憶も定着しやすいですし，なるほど！ と思えれば勉強が楽しいものになりますね．

*2 正方形の面積，というイメージは思い浮かべやすいですが，じゃあ面積が負の場合はどうなるんだろう，という疑問にもつながります．そこは割り切っておきましょう．