

双曲線関数の公式 1

Joh @物理のかぎプロジェクト

2006-01-15

双曲線関数に成り立つ公式は、[三角関数の公式 1](#) に大変よく似ています。

平方関係

一番目の式は、公式というよりは定義そのものです。

$$\cosh^2 \theta - \sinh^2 \theta = 1$$

$$1 - \tanh^2 \theta = \frac{1}{\cosh^2 \theta}$$

$$1 - \frac{1}{\tanh^2 \theta} = -\frac{1}{\sinh^2 \theta}$$

加法定理

$$\sinh(\alpha \pm \beta) = \sinh \alpha \cosh \beta \pm \cosh \alpha \sinh \beta$$

$$\cosh(\alpha \pm \beta) = \cosh \alpha \cosh \beta \pm \sinh \alpha \sinh \beta$$

$$\tanh(\alpha \pm \beta) = \frac{\tanh \alpha \pm \tanh \beta}{1 \pm \tanh \alpha \tanh \beta}$$

2 倍角の公式

加法定理で $\alpha = \beta = \theta$ と置けば出てきます。

$$\sinh 2\theta = 2 \sinh \theta \cosh \theta$$

$$\cosh 2\theta = 2 \cosh^2 \theta - 1 = 1 + 2 \sinh^2 \theta = \cosh^2 \theta + \sinh^2 \theta$$

$$\tanh 2\theta = \frac{2 \tanh \theta}{1 + \tanh^2 \theta}$$

ここで $\tanh \frac{\theta}{2} = t$ と置くと、次のようにも表せます。

$$\sinh 2\theta = \frac{2}{1 - t^2}$$

$$\cosh 2\theta = \frac{1 + t^2}{1 - t^2}$$

$$\tanh 2\theta = \frac{2t}{1 + t^2}$$

3 倍角の公式

加法定理で、 $\alpha = \theta$ 、 $\beta = 2\theta$ と置き、2 倍角の公式を再び使えば導けます。もしくは、オイラーの関係式 $\exp^{\pm\theta} = \cosh \theta \pm \sinh \theta$ の両辺を 3 乗して、工夫するのも良い方法です。

$$\sinh 3\theta = 3 \sinh \theta + 4 \sinh^3 \theta$$

$$\cosh 3\theta = 4 \cosh^3 \theta - 3 \cosh \theta$$

$$\tanh 3\theta = \frac{3 \tanh \theta + \tanh^3 \theta}{1 + 3 \tanh^2 \theta}$$

半角の公式

2 倍角の公式から導けます。

$$\sinh^2 \frac{\theta}{2} = \frac{\cosh \theta - 1}{2}$$

$$\cosh^2 \frac{\theta}{2} = \frac{\cosh \theta + 1}{2}$$

$$\tanh^2 \frac{\theta}{2} = \frac{\cosh \theta - 1}{\cosh \theta + 1}$$

積和の公式

この公式は、加法定理で $\sinh(\alpha \pm \beta)$, $\cosh(\alpha \pm \beta)$ を計算しておき、うまく足したり引いたりして導きます。

$$\sinh \alpha \cosh \beta = \frac{1}{2} \left(\sinh(\alpha + \beta) + \sinh(\alpha - \beta) \right)$$

$$\cosh \alpha \sinh \beta = \frac{1}{2} \left(\sinh(\alpha + \beta) - \sinh(\alpha - \beta) \right)$$

$$\cosh \alpha \cosh \beta = \frac{1}{2} \left(\cosh(\alpha + \beta) + \cosh(\alpha - \beta) \right)$$

$$\sinh \alpha \sinh \beta = \frac{1}{2} \left(\cosh(\alpha + \beta) - \cosh(\alpha - \beta) \right)$$

和積の公式

積和の公式で $\alpha = \frac{A+B}{2}$, $\beta = \frac{A-B}{2}$ と置けば導けます。

$$\sinh A + \sinh B = 2 \sinh \frac{A+B}{2} \cosh \frac{A-B}{2}$$

$$\sinh A - \sinh B = 2 \cosh \frac{A+B}{2} \sinh \frac{A-B}{2}$$

$$\cosh A + \cosh B = 2 \cosh \frac{A+B}{2} \cosh \frac{A-B}{2}$$

$$\cosh A - \cosh B = 2 \sinh \frac{A+B}{2} \sinh \frac{A-B}{2}$$

逆に、和積の公式で $\frac{A+B}{2} = \alpha$, $\frac{A-B}{2} = \beta$ と置けば積和の公式が得られます。