

# もう一度ベクトル3 (幾何と代数の通訳)

やっさん@物理のかぎプロジェクト

執筆中

## 幾何と代数の通訳

ベクトルは線分 (大きさ, 長さ) に向きという情報を加えた有向線分と考えました。ですから当然ベクトルには幾何学的な情報があります。でも和や, 差, 積が考えられることからわかるとおり, 代数的な概念も含んでいます。一度ベクトルを適当な<sup>\*1</sup> 座標系の成分を用いて表してあげれば, あっという間に代数的な表現が可能になるわけです。

### Contents

- 幾何と代数の通訳
- 原点以外からの変位ベクトル
- 内分点の公式
- 絶対値の公式
- 直交条件
- 付録: ベクトルの外積の直交性とその大きさの確認
  - 外積で作られるベクトルはもとの2つベクトルに直交しているか?
  - 外積で作られるベクトルの大きさはもとの2つのベクトルが張る平行四辺形の面積に等しいか?
- まとめ

簡単な幾何学的な条件がベクトルではどう表現できるかを見ていきましょう。

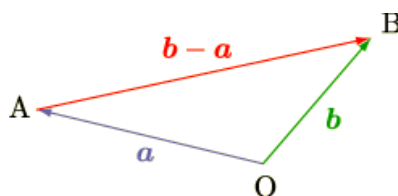
## 原点以外からの変位ベクトル

基本的にベクトルは「原点からどれだけ変位したか」という成分で書かれています。でも幾何学って、図形に含まれないただの基準点なら、どんな位置にあっても関係ないはずですよ？そこで、図形に含まれる点を始点としたベクトルではどういった書き換えを施してあげればいいのかということ覚えておく必要があります。つまり、「点  $A$  から  $B$  へのベクトルをどう表現すればいいか」という事がこのセクションの内容となります。

ベクトルの和のところを思い出してみましょう。2つの表記が混在していますが点の移動を追いややすくするため、矢印表記を用いて解説しますと

$$\begin{aligned}\vec{OB} &= \vec{OA} + \vec{AB} \\ \Leftrightarrow \vec{AB} &= \vec{OB} - \vec{OA} = b - a\end{aligned}$$

となります。この結果は覚えておきましょう。



また、この結果の興味深い点は原点  $O$  について何も条件をこたわっていない点です。つまり、原点  $O$  ではなくても任意の点に関して成立します。確かに  $\vec{AB}$  は  $A$   $B$  の決め方だけに依存し、原点がどの位置にあるかは関係ないはずなのでそういった側面から眺めた条件とも合致しています。こういった数学が現実を裏切らないことが数学が自然科学において絶大な信頼を得ている一端なのかもしれません

## 内分点の公式

内分点を表すベクトルの表記を天下りに書いてしまいますと「点  $A$  と点  $B$  を  $m:n$  に内分する点  $P$ 」を表す位置ベクトルは、適当な原点 (基準点) を  $O$  とし、

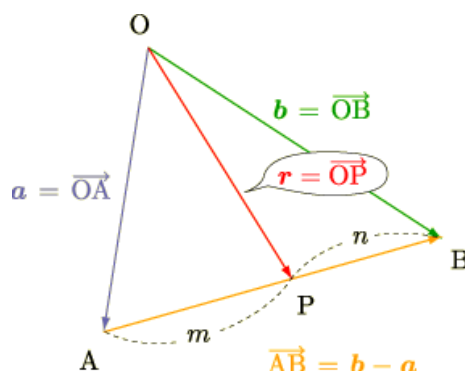
$$\begin{aligned}r &\stackrel{\text{def}}{=} \vec{OP} \\ a &\stackrel{\text{def}}{=} \vec{OA}, \quad b \stackrel{\text{def}}{=} \vec{OB}\end{aligned}$$

\*1 もう一度ベクトル1, 同2ではデカルト座標しか扱っていませんが実は極座標で表しても全く問題ありません。極座標で表さないのはは中学、高校でもあまり扱っていないということもあり、極座標で考えてもあまり『わかった!』という感想には至り難いのが原因かなと思います。そういえば極座標だと、2点間の相互の座標変換も面倒です

とすると

$$\begin{aligned} \mathbf{r} &= \frac{n}{m+n} \mathbf{a} + \frac{m}{m+n} \mathbf{b} \\ &\equiv \frac{n\mathbf{a} + m\mathbf{b}}{m+n} \end{aligned}$$

とかけます。



それでは証明してみましょう。いきなり上の公式が見えてしまう人は別としてやはり“内分”しているのですから，内分している線分で考えるのが一番妥当なはずです。以上の図の半直線  $AB$  を見てください

図から  $P$  が半直線  $AB$  の  $m:n$  の内分点である条件としては

$$AP : AB = m : m+n$$

であることです。また，比は左右同じ数で割っても比には変化がないので

$$m : m+n = \frac{m}{m+n} : 1$$

と変形します。この式は「半直線  $AB$  の長さを 1 としたときに半直線  $AP$  の長さは  $\frac{m}{m+n}$  となる」事を言っています。この事をベクトルの表記に反映してあげればいいのです。

図から  $\overrightarrow{AP}$  は  $\overrightarrow{AB}$  と方向が等しいので  $\overrightarrow{AP}$  は  $\overrightarrow{AB}$  の定数倍で表せるはずですね。ではその定数を求めなければならないのですが，その値を上記の比で求めていたわけです。上記で求めたとおり

$$AP : AB = \frac{m}{m+n} : 1$$

なのでベクトルな長さの関係になおすと

$$|\overrightarrow{AP}| : |\overrightarrow{AB}| = \frac{m}{m+n} : 1$$

となることから

$$\overrightarrow{AP} = \frac{m}{m+n} \overrightarrow{AB} \quad (*)$$

となります。大きさの比と平行な条件だけでは必ずしも係数が正とは限りませんが、図から向き(方向)も等しいことから上記の式が導かれます。

$$\begin{aligned}
 (*) &\iff (m+n)\vec{AP} = m\vec{AB} \\
 &\iff (m+n)(\vec{OP} - \vec{OA}) = m(\vec{OB} - \vec{OA}) \\
 &\iff (m+n)(\mathbf{r} - \mathbf{a}) = m(\mathbf{b} - \mathbf{a}) \\
 &\iff (m+n)\mathbf{r} - (m+n)\mathbf{a} = m\mathbf{b} - m\mathbf{a} \\
 &\iff (m+n)\mathbf{r} = (m+n)\mathbf{a} + m\mathbf{b} - m\mathbf{a} \\
 &\iff (m+n)\mathbf{r} = n\mathbf{a} + m\mathbf{b} \\
 &\iff \mathbf{r} = \frac{n\mathbf{a} + m\mathbf{b}}{m+n} \tag{1}
 \end{aligned}$$

となり証明できました。特に  $m+n=1$  のとき  $m=1-n$  で

$$\mathbf{r} = n\mathbf{b} + (1-n)\mathbf{a} \tag{2}$$

と書けます。また逆に (1), (2) 式のようにかけるときそれは直線  $AB$  上に点  $P$  が乗っていると言い換えることができます。

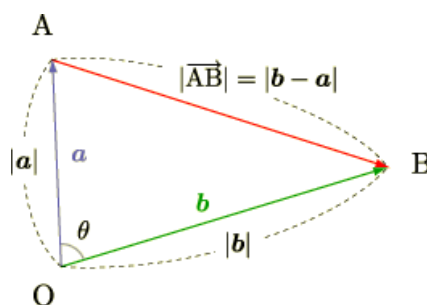
## 絶対値の公式

先ずこの公式を天降り的に紹介しますと

$$|\vec{AB}|^2 = |\mathbf{B} - \mathbf{A}|^2 = |\mathbf{B}|^2 - 2\mathbf{B} \cdot \mathbf{A} + |\mathbf{A}|^2$$

となります。二項展開に非常に似ているので覚えるのもそれほど苦にはならないかと思えます。この公式の利用例を紹介しておきます。証明は余弦定理を用いて行います。簡単なので余力があれば実行してみましょう

どうしても  $A$  から  $B$  の距離を測りたいときに  $|\mathbf{A}|$  と  $|\mathbf{B}|$  ,  $\theta$  しかわかっていないことがあります。<sup>\*2</sup>



もし具体的に  $A$  と  $B$  がわかれば内積を計算するなどして上記の3量は求まることを確認してみてください。このときに  $A$  から  $B$  の距離を上記の3量で表す公式があります。方程式として変

形したいので答えが求まったフリをして  $k(k \geq 0)$  などと置いておきます .

$$\begin{aligned} |\vec{AB}| &= k \\ \iff |\vec{AB}|^2 &= k^2 (\because k \geq 0) \\ \iff |\vec{OB} - \vec{OA}|^2 &= k^2 \\ \iff |\mathbf{b} - \mathbf{a}|^2 &= k^2 \\ \iff |\mathbf{b}|^2 - 2\mathbf{b} \cdot \mathbf{a} + |\mathbf{a}|^2 &= k^2 \end{aligned}$$

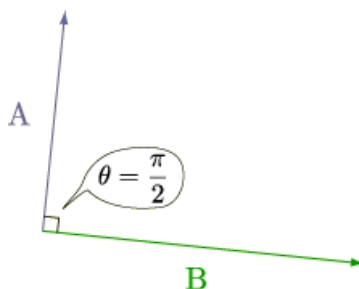
4 行目から 5 行目の変形が該当する公式です . 以上の左辺は計算できるので左辺の値の平方根をとれば具体的に値が求まります .

## 直交条件

2つのベクトルが直交する条件ってどう表せるのか? というのがこのセクションのテーマです . 内積に2つのベクトルの角度の表記があったので  $\theta = \pi/2$  の条件を入れてあげれば良いのではないのでしょうか? また  $|\mathbf{A}||\mathbf{B}|\cos\theta$  に上記の条件を代入すると (内積) = 0 となるので代数的な側面においても上記な条件を適用して

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = A_x B_x + A_y B_y + A_z B_z = 0$$

という条件を考えればよいことになります .



ベクトルの外積  $\mathbf{A} \times \mathbf{B}$  にも角度の部分があるので外積で作られるベクトルの大きさ  $|\mathbf{A}||\mathbf{B}|\sin\theta$  に  $\theta = \pi/2$  を代入すると  $|\mathbf{A}||\mathbf{B}|$  という結果が得られますが ,

$$\begin{aligned} |\mathbf{a} \times \mathbf{b}| &= |\mathbf{A}||\mathbf{B}| \\ \iff \sqrt{(a_y b_z - a_z b_y)^2 + (a_z b_x - a_x b_z)^2 + (a_x b_y - a_y b_x)^2} &= \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2} \sqrt{b_x^2 + b_y^2 + b_z^2} \end{aligned}$$

となるだけで変数が左右にばらばらに散らばっちゃって使い物になりません . 因みにこれを両辺平方して  $\sqrt{\quad}$  を外すして整理すると

$$a_x^2 b_x^2 + a_y^2 b_y^2 + a_z^2 b_z^2 = -2(a_y b_z a_z b_y + a_z b_x a_x b_z + a_x b_y a_y b_x)$$

\*2 中学校で習う三角形の三つの合同条件を覚えているでしょうか? その中の二辺夾角相等 (二辺とその間の角がそれぞれ等しい) がまさにこの内容です . つまり ,  $|\mathbf{a}|$  と  $|\mathbf{b}|$  とその間の角を定めれば三角形は一意に定まるということですから . 確かに二本のペンの根っこをくっつけ間の角度をグリグリ動かしてやれば間の角度1つにつき三角形が定まることは感覚的に納得できると思います .

となりますが、これを移項したものは内積の直交条件で導いた式を2乗すると得られます。かなり計算した割には結局ほぼ同じ式を計算していたわけです。(まあ数学的には同値になってもらわないと困るので当たり前っちゃ当たり前ですが...)

内積を計算した方が 楽... ですよ？ (T T)

## 付録：ベクトルの外積の直交性とその大きさの確認

もう一度ベクトル2では外積ベクトルを天下り的に「こうなります」としてしまったので直交性を確認したついでにその大きさが2ベクトルにより作られる平行四辺形になっているか確認してまいましょう

外積で作られるベクトルはもとの2つベクトルに直交しているか？

$$\mathbf{c} \stackrel{\text{def}}{=} \mathbf{a} \times \mathbf{b}$$

とすると「[もう一度ベクトル2](#)」から  $\mathbf{c}$  は  $\mathbf{a}$  と  $\mathbf{b}$  の各成分を使って

$$\mathbf{c} = \begin{pmatrix} a_y b_z - a_z b_y \\ a_z b_x - a_x b_z \\ a_x b_y - a_y b_x \end{pmatrix}$$

と書けます。ここで、 $\mathbf{a}$  と  $\mathbf{c}$  の内積をとります。内積は各成分ごとの和を取ればよかったので

$$\begin{aligned} \mathbf{a} \cdot \mathbf{c} &= a_x(a_y b_z - a_z b_y) + a_y(a_z b_x - a_x b_z) + a_z(a_x b_y - a_y b_x) \\ &= a_x a_y b_z - a_x a_z b_y + a_y a_z b_x - a_y a_x b_z + a_z a_x b_y - a_z a_y b_x \\ &= a_x a_y b_z - a_y a_x b_z - a_x a_z b_y + a_z a_x b_y + a_y a_z b_x - a_z a_y b_x \\ &= 0 \end{aligned}$$

となりました。内積が0なので直交することになります。当然  $\mathbf{b}$  に対しても全く同様の計算を行うことにより、内積が0になることを確認できます。

実はここで、 $\mathbf{a} \times \mathbf{b} = -\mathbf{b} \times \mathbf{a}$  に注意すると

$$-\mathbf{c} = \begin{pmatrix} b_y a_z - b_z a_y \\ b_z a_x - b_x a_z \\ b_x a_y - b_y a_x \end{pmatrix}$$

となり、直交性を示したいだけならばその向き(方向)には興味がないはずなので-がついて逆を向いていても問題はないはずですね!?つまり

$$\begin{aligned} \mathbf{b} \cdot (-\mathbf{c}) &= 0 \\ \iff \mathbf{b} \cdot \mathbf{c} &= 0 \end{aligned}$$

ということです

そこで  $b$  と “ $-c$ ” の内積を考えます。その成分によ ~ く注意してみると  $a$  と  $c$  の内積のそれと対応が全く一致しています。

したがって全く同じ計算により内積が 0 になることが言えるので直交していることがいえます。<sup>\*3</sup>

外積で作られるベクトルの大きさははもとの 2 つのベクトルが張る平行四辺形の面積に等しいか？

「もう一度ベクトル2」では  $a \times b$  の大きさは  $|a||b| \sin \theta$  と定義しました。これを確認するために二通りに表してその値が一致することを見ましょう。

このベクトルの大きさの中で  $\sin \theta$  という量に注目します。三角関数には  $\sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1$  という恒等式があったのでそれを利用して  $|a||b| \sin \theta$  を書き換えると

$$\begin{aligned} & |a||b| \sin \theta \\ &= |a||b| \sqrt{1 - \cos^2 \theta} \quad (\because \sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1, 0 < \theta < \pi) \end{aligned}$$

ここで内積の図形的な定義である  $a \cdot b = |a||b| \cos \theta$  を  $\cos \theta$  についてといて代入すると

$$\begin{aligned} & |a||b| \sqrt{1 - \cos^2 \theta} \\ &= |a||b| \sqrt{1 - \left(\frac{a \cdot b}{|a||b|}\right)^2} \\ &= |a||b| \sqrt{\frac{|a|^2|b|^2 - (a \cdot b)^2}{|a|^2|b|^2}} \\ &= \sqrt{|a||b|^2 \frac{|a|^2|b|^2 - (a \cdot b)^2}{|a|^2|b|^2}} \\ &= \sqrt{|a|^2|b|^2 - (a \cdot b)^2} \end{aligned}$$

とかなりコンパクトになったのでここに具体的な成分を代入していきます。<sup>\*4</sup> まず  $\sqrt{\quad}$  の中身をばらすと

$$\begin{aligned} & |a|^2|b|^2 - (a \cdot b)^2 \\ &= (a_x^2 + a_y^2 + a_z^2)(b_x^2 + b_y^2 + b_z^2) - (a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z)^2 \\ &= a_x^2 b_y^2 + a_x^2 b_z^2 + a_y^2 b_x^2 + a_y^2 b_z^2 + a_z^2 b_x^2 + a_z^2 b_y^2 - 2(a_x a_y b_x b_y + a_y a_z b_y b_z + a_z a_x b_z b_x) \\ &= (a_x^2 b_y^2 - 2a_x a_y b_x b_y + a_y^2 b_x^2) + (a_x^2 b_z^2 - 2a_x a_z b_x b_z + a_z^2 b_x^2) + (a_y^2 b_z^2 - 2a_y a_z b_y b_z + a_z^2 b_y^2) \\ &= (a_x b_y - a_y b_x)^2 + (a_x b_z - a_z b_x)^2 + (a_y b_z - a_z b_y)^2 \\ &= (a_y b_z - a_z b_y)^2 + (a_z b_x - a_x b_z)^2 + (a_x b_y - a_y b_x)^2 \end{aligned}$$

<sup>\*3</sup> 「何をまどろっこしいことを」と思った方もいると思います。確かにこんな簡単な計算なら代入して計算をしたほうが早いのですが、数学の定理を証明する際に計算が多量になることが目に見えたりしている場合別の定理を利用したりこのようにトリッキーに証明したりします。正直なところ、人に聞くと「ズルイ」と思いますが、自分で思いつくと数学者の仲間入りをした気になってしまいます。(あくまでも思い違いですが...)

となりました．一方  $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$  のほうは

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \begin{pmatrix} a_y b_z - a_z b_y \\ a_z b_x - a_x b_z \\ a_x b_y - a_y b_x \end{pmatrix}$$

と表せるのでその大きさは

$$|\mathbf{a} \times \mathbf{b}| = \sqrt{(a_y b_z - a_z b_y)^2 + (a_z b_x - a_x b_z)^2 + (a_x b_y - a_y b_x)^2}$$

と成分を用いてかけるはずですがこれは先ほどの計算の  $\sqrt{\quad}$  の中身と一致しています．つまりベクトルの大きさは  $|\mathbf{a}||\mathbf{b}|\sin\theta$  と等しいことがわかりました．

## まとめ

以上で求めたベクトルの式を眺めてみるとほとんどのものが，幾何学的な条件を反映させた式を少し変形したものばかりです．でも，そのベクトルをひとたび， $x, y, z$  を用いて表せば，デカルト座標系の条件式が手に入るわけです．純粋な数学の証明でも，初等幾何学の定理だけで攻めるか，座標を設定して攻めるかという選択肢に「ベクトルで攻める」という選択肢が1つ加わったわけです．

物理的には，重心の位置ベクトルが内分点を表すベクトルで表現できたり，内積が0という条件から，変位ベクトルと力のベクトルが直交しているのでその力の成す仕事は0などと考えることができるわけです．

\*4 この値を2で割ったものは二つのベクトルで作られる三角形の面積になっている事から受験生などは覚えておくとう便利です．正四面体の体積への応用なんかも楽チンかもしれません