div の座標変換不変性

クロメル@物理のかぎプロジェクト

2010-01-08

ベクトル解析で出てくる div（ダイバージェンス，発散）は，他のデカルト座標系では果たして不変なのかということを調べてみました．

次の記事は，rot の座標変換 です．

div の表式

ベクトル $\boldsymbol{A}$ に対して，div は以下のように表わされます．

$$\mathrm{div}\boldsymbol{A} = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z} \tag{1}$$

これから，あるデカルト座標系 S のベクトル $\boldsymbol{A}$ の別のデカルト座標系 S' への変換を求めていきます．実直交な変換行列を U と書くと，

$$\begin{pmatrix} A_x \\ A_y \\ A_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_{11} & u_{12} & u_{13} \\ u_{21} & u_{22} & u_{23} \\ u_{31} & u_{32} & u_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A'_x \\ A'_y \\ A'_z \end{pmatrix} \tag{2}$$

実直交の行列 U の逆行列 U^{-1} は，転置（ ^{T} と表す）したものに等しい $U^T = U^{-1}$ から，位置座標

$$\boldsymbol{r} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

の変換行列は，（下式はプライム $'$ の位置が逆変換なのに注意．つまり，下の式は行列 U が転置行列であって，式 (2) と式 (3) の変換性は同じ．）

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_{11} & u_{21} & u_{31} \\ u_{12} & u_{22} & u_{32} \\ u_{13} & u_{23} & u_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \tag{3}$$

ここで，偏微分の座標変換を求めると，

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} &= \frac{\partial}{\partial x'}\frac{\partial x'}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y'}\frac{\partial y'}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial z'}\frac{\partial z'}{\partial x} \\ &= u_{11}\frac{\partial}{\partial x'} + u_{12}\frac{\partial}{\partial y'} + u_{13}\frac{\partial}{\partial z'} \end{aligned} \tag{4}$$

等という関係があるから，それを行列でまとめると，

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_{11} & u_{12} & u_{13} \\ u_{21} & u_{22} & u_{23} \\ u_{31} & u_{32} & u_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x'} \\ \frac{\partial}{\partial y'} \\ \frac{\partial}{\partial z'} \end{pmatrix} \tag{5}$$

となります．

本題

いよいよ，div の公式，式 (1) に式 (2) と式 (5) を代入します．

$$\begin{aligned} \mathrm{div}\boldsymbol{A} &= \left(\frac{\partial}{\partial x} \, \frac{\partial}{\partial y} \, \frac{\partial}{\partial z} \right) \begin{pmatrix} A_x \\ A_y \\ A_z \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} A_x \\ A_y \\ A_z \end{pmatrix} \\ &= \left(\begin{pmatrix} u_{11} & u_{12} & u_{13} \\ u_{21} & u_{22} & u_{23} \\ u_{31} & u_{32} & u_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x'} \\ \frac{\partial}{\partial y'} \\ \frac{\partial}{\partial z'} \end{pmatrix} \right)^T \begin{pmatrix} u_{11} & u_{12} & u_{13} \\ u_{21} & u_{22} & u_{23} \\ u_{31} & u_{32} & u_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A'_x \\ A'_y \\ A'_z \end{pmatrix} \\ &= \left(\frac{\partial}{\partial x'} \, \frac{\partial}{\partial y'} \, \frac{\partial}{\partial z'} \right) \, U^T \, U \, \begin{pmatrix} A'_x \\ A'_y \\ A'_z \end{pmatrix} \\ &= \left(\frac{\partial}{\partial x'} \, \frac{\partial}{\partial y'} \, \frac{\partial}{\partial z'} \right) \begin{pmatrix} A'_x \\ A'_y \\ A'_z \end{pmatrix} \end{aligned} \tag{6}$$

となり，めでたく座標変換に対する不変性が示せました．それでは，今日はこの辺で．

続きは こちら．